gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



Geometria architektury

Lekcje z wykopem

Scenariusz lekcji dla nauczyciela

Geometria architektury

Opis: Na tej lekcji uczniowie przekształcają wzory, korzystają z twierdzenia Pitagorasa oraz z własności trójkątów o kątach 90°, 60°, 30°. Ważnym elementem lekcji jest to, że muszą zauważać związki występujące na rysunkach. Ćwiczymy także konstrukcje geometryczne.

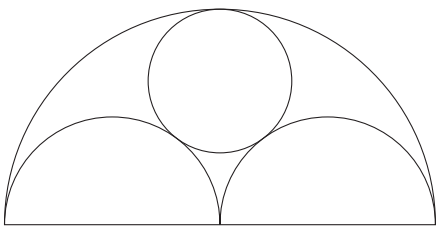
Uwagi: Lekcję można rozpocząć prezentacją różnorodnych detali architektonicznych w oknach budynków, aby pokazać geometryczne kształty w nich występujące (zob. załącznik nr 1 do scenariusza). Przykłady konstrukcji można dobierać stosownie do poziomu wiedzy i umiejętności uczniów.

Przebieg lekcji:

1. Nauczyciel: Związki architektury i geometrii sięgają zamierzchłej przeszłości. Widać je już w liczących blisko 5000 lat kamiennych okręgach Stonehenge czy zdecydowanie bardziej wyrafinowanej architektonicznie piramidzie Cheopsa. Ta zbudowana w formie ostrosłupa o podstawie kwadratu budowla, poprzecinana siecią wewnętrznych korytarzy, jest świadectwem zaawansowanej wiedzy matematycznej, jaką musieli posiadać jej budowniczowie. Dobrym przykładem ścisłych relacji między architekturą i geometrią są także opisane na planie elipsy rzymskie Koloseum czy mediolańska katedra Narodzin św. Marii, gotyckie dzieło architektury sakralnej wzniesione na planie krzyża z typowymi dla tego stylu łukowatymi oknami, ozdobionymi kamiennymi lub ceglanymi ornamentami, a wypełnione wielobarwnymi witrażami.

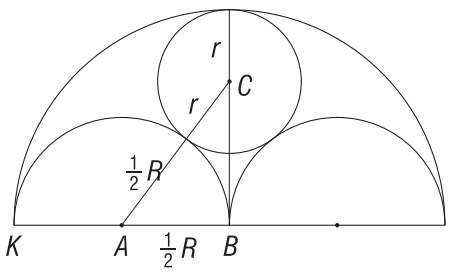
   Dzisiejszą lekcję poświęcimy gotyckim oknom, będziemy konstruować ich zwieńczenia, wyznaczać długości odcinków, promienie kół oraz łuków.

2. Ćwiczenie: Wykonaj projekt zwieńczenia przedstawionego na poniższym szkicu, czyli podaj związek między długościami wszystkich półkoli i koła, a następnie dobierz odpowiednie długości promieni i sporządź rysunek w skali.



   Rozwiązanie: Niech promień największego półkola wynosi R, czyli promienie mniejszych półkoli wynoszą $\frac{1}{2}R$. Ale jak wyznaczyć promień najmniejszego koła? Oznaczmy jego długość przez r.

   Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku:



$$KB = R$$
$$AB = \tfrac{1}{2}R$$
$$AC = \tfrac{1}{2}R + r$$
$$BC = R - r$$

   Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy:

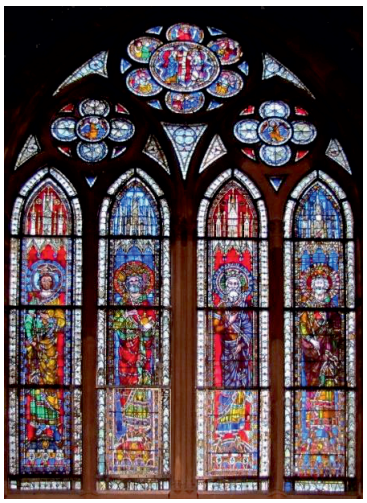
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$\left(\tfrac{1}{2}R + r\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}R\right)^2 + (R - r)^2$$
$$\tfrac{1}{4}R^2 + Rr + r^2 = \tfrac{1}{4}R^2 + R^2 - 2Rr + r^2$$
$$r = \tfrac{1}{3}R$$

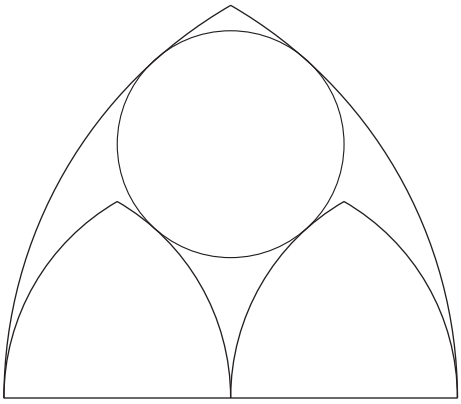
Teraz można już wykonać dokładny projekt tego zwieńczenia.

Uwaga. Można przypomnieć podział odcinka na trzy części albo wygodnie dobrać promień największego koła.

3. Zadanie: Wykonaj projekt zwieńczenia okna katedry w Strasburgu (zob. fotografia) według przygotowanego szkicu.



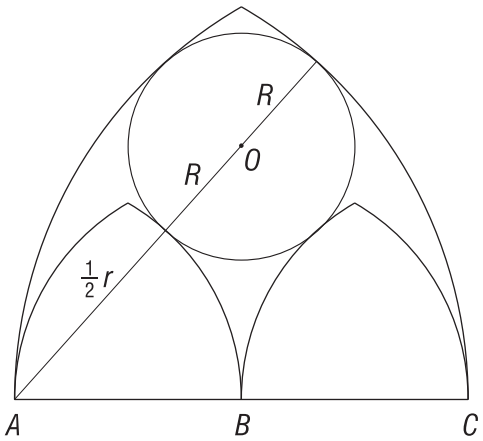




(https://en.wikipedia.org/wiki/Strasbourg_Cathedral#/media/File:StrasbourgCath_BasCoteN_04a.jpg)

Rozwiązanie: Rysujemy dwa łuki o promieniu r ze środkami na końcach podstawy okna. Otrzymujemy duży ostrołuk. Dwa mniejsze ostrołuki otrzymamy, rysując łuki o promieniu $\frac{1}{2}r$.

Wprowadźmy oznaczenia:



$AC = r$

$AB = \frac{1}{2}r$

$AO = \frac{1}{2}r + R$ oraz $AO = r - R$

$\frac{1}{2}r + R = r - R$

$R = \frac{1}{4}r$

Jak wyznaczyć punkt O? Wystarczy znaleźć punkt przecięcia łuków o promieniu $\frac{1}{2}r + R = \frac{3}{4}r$ o środkach w punktach A i C.

Możemy wyznaczyć także długość odcinka OB. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABO otrzymujemy:

$$AO^2 = OB^2 + AB^2$$

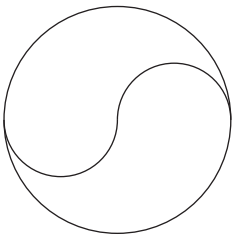
$$OB^2 = \frac{9}{16}r^2 - \frac{4}{16}r^2$$

$$OB = \frac{\sqrt{5}}{4}r$$

W takim razie odległość środka rysowanego okręgu od podstawy zwieńczenia okna wynosi $\frac{\sqrt{5}}{4}r$.

Teraz można już wykonać dokładny projekt tego zwieńczenia.

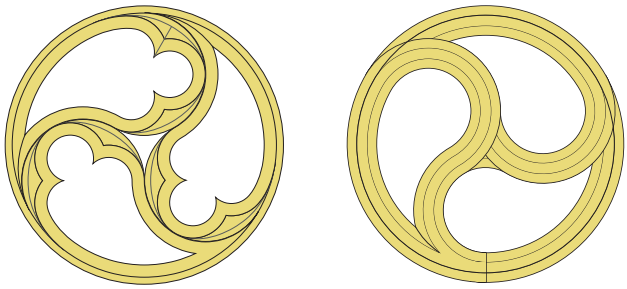
4. Zadanie: Skonstruuj symbol taijitu (zob. fotografia) według podanego szkicu.



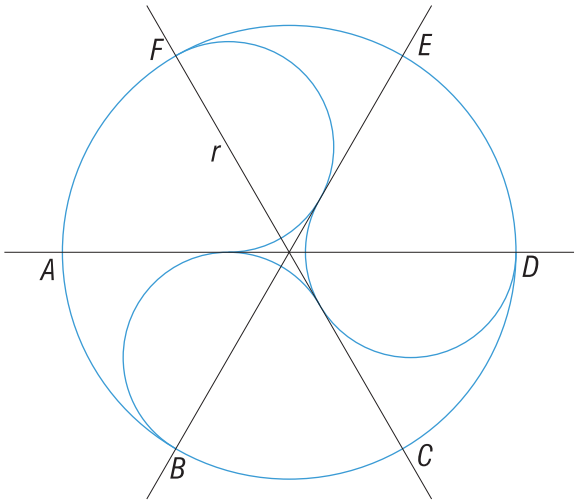


Uwaga. Taki kształt nazywa się podwójnym rybim pęcherzem.

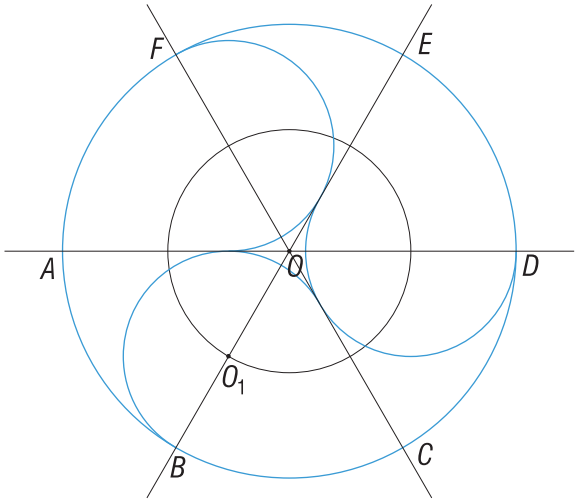
5. Nauczyciel: Zajmiemy się teraz zrozumieniem konstrukcji tak zwanego potrójnego rybiego pęcherza. Jak go skonstruować?



Uwagi. Uczniowie mogą otrzymać kserokopię z rysunkiem (zob. załącznik nr 2 do scenariusza), aby na nim odkryć konstrukcję potrójnego rybiego pęcherza.

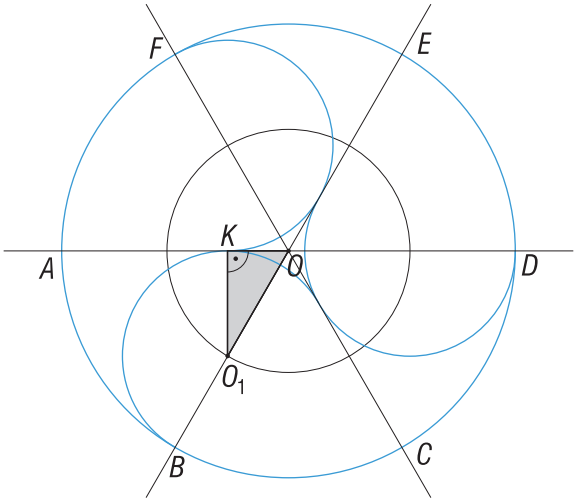


Małe okręgi tworzące pęcherz mają równe promienie i są styczne wewnętrznie do okręgu o promieniu r, są styczne zewnętrznie do siebie i są styczne do prostych AD, BE, CF. Ponieważ punkty $ABCDEF$ są wierzchołkami sześciokąta foremnego, to wszystkie kąty środkowe w dużym okręgu mają miarę 60°.



Środki okręgów leżą na okręgu o środku O i o promieniu OO_1. Ich środki są wierzchołkami trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o środku O i o promieniu OO_1.

Wyznaczymy długość odcinka OO_1.



Trójkąt OO_1K jest trójkątem o kątach 90°, 60°, 30°. W takim razie $O_1K = \frac{OO_1 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

$$OO_1 = r - O_1B$$

Pamiętamy, że r to promień dużego koła.

$O_1B = O_1K$ (promienie małego koła tworzącego pęcherz)

W takim razie:

$$OO_1 = r - O_1K$$

$$OO_1 = r - \frac{OO_1 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Wyznaczamy OO_1:

$$OO_1 + \frac{OO_1 \cdot \sqrt{3}}{2} = r$$

$$\frac{OO_1 \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)}{2} = r$$

$$OO_1 = \frac{2r}{2 + \sqrt{3}}$$

Wyznaczymy promień małego koła tworzącego pęcherz r_p:

$$r_p = O_1K = \frac{OO_1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{2r}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

Podsumowanie

Nauczyciel: Lekcja pokazuje wykorzystanie geometrii w architekturze. Ma to uzmysłowić uczniom, że są otoczeni matematyką.