

## Zmiany w podstawie programowej dla szkoły podstawowej oraz liceów i techników wprowadzone w 2024 r.

### Szkoła podstawowa

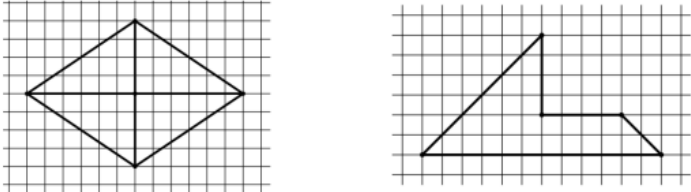
Poniżej zamieszczamy treści nauczania matematyki dla klas 4-8 oraz wybrane fragmenty warunków realizacji tych treści ujęte w zmienionej podstawie programowej dla szkoły podstawowej obowiązującej od 1 września 2024 roku. Kolorem czerwonym zaznaczono wprowadzone zmiany. Przy wybranych treściach umieszczono komentarze.

Treści nauczania według podstawy programowej – klasy IV–VI	Komentarze
<b>I. Liczby naturalne w dziesiętkowym układzie pozycyjnym. Uczeń:</b>	
1) zapisuje i odczytuje liczby naturalne wielocyfrowe;	
2) interpretuje liczby naturalne na osi liczbowej;	
3) porównuje liczby naturalne;	
4) zaokrągla liczby naturalne;	
5) liczby w zakresie do 3000 zapisane w systemie rzymskim przedstawia w systemie dziesiętkowym, a zapisane w systemie dziesiętkowym przedstawia w systemie rzymskim.	
<b>II. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń:</b>	
1) dodaje i odejmuje w pamięci liczby naturalne dwucyfrowe lub większe, liczbę jednocyfrową dodaje do dowolnej liczby naturalnej i odejmuje od dowolnej liczby naturalnej;	
2) dodaje i odejmuje liczby naturalne wielocyfrowe sposobem pisemnym i za pomocą kalkulatora;	
3) mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową sposobem pisemnym, w pamięci (w najprostszyc przykładach) i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach);	
<del>4) wykonuje dzielenie z resztą liczb naturalnych;</del>	Te treści są zawarte w punkcie II.15.
4) stosuje wygodne dla siebie sposoby ułatwiające obliczenia, w tym przemienność i łączność dodawania i mnożenia oraz rozdzielność mnożenia względem dodawania;	
5) porównuje liczby naturalne z wykorzystaniem ich różnicy lub ilorazu;	
6) rozpoznaje liczby podzielne przez 2, 3, 4, 5, 9, 10, 100;	
7) rozpoznaje liczbę złożoną, gdy jest ona jednocyfrowa lub dwucyfrowa, a także gdy na istnienie dzielnika właściwego wskazuje cecha podzielności;	
<del>9) rozkłada liczby dwucyfrowe na czynniki pierwsze;</del>	Te treści są zawarte w punkcie II.14.
8) oblicza kwadraty i sześciany liczb naturalnych;	
9) stosuje reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;	
10) szacuje wyniki działań;	
11) znajduje największy wspólny dzielnik (NWD) <del>w sytuacjach nie trudniejszych niż NWD (600, 72), NWD (1140, 567), NWD (910,</del>	Znajdowanie NWD i NWW dwóch liczb naturalnych ograniczono do

2016) oraz wyznacza i najmniejszą wspólną wielokrotność (NWW) dwóch liczb naturalnych co najwyżej trzycyfrowych metodą rozkładu na czynniki;	przypadków dotyczących liczb co najwyżej trzycyfrowych.
12) rozpoznaje wielokrotności danej liczby, kwadraty, sześciany, liczby pierwsze, liczby złożone;	
13) odpowiada na pytania dotyczące liczebności zbiorów różnych rodzajów liczb wśród liczb z pewnego niewielkiego zakresu (np. od 1 do 200 czy od 100 do 1000), o ile liczba w odpowiedzi jest na tyle mała, że wszystkie rozważane liczby uczeń może wypisać;	
14) rozkłada liczby naturalne na czynniki pierwsze, co najwyżej trzycyfrowe, w przypadku gdy co najwyżej jeden z tych czynników jest liczbą większą niż 10;	Rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze ograniczono do przypadków dotyczących liczb co najwyżej trzycyfrowych.
15) wyznacza wynik dzielenia z resztą liczby $a$ przez liczbę $b$ i zapisuje liczbę $a$ w postaci: $a = b \cdot q + r$ , gdzie $0 \leq r < b$ .	
<b>III. Liczby całkowite. Uczeń:</b>	
1) podaje praktyczne przykłady stosowania liczb ujemnych;	
2) interpretuje liczby całkowite na osi liczbowej;	
3) oblicza wartość bezwzględną;	
4) porównuje liczby całkowite;	
5) wykonuje proste rachunki pamięciowe na liczbach całkowitych.	
<b>IV. Ułamki zwykłe i dziesiętne. Uczeń:</b>	
1) opisuje część danej całości za pomocą ułamka;	
2) przedstawia ułamek jako iloraz liczb naturalnych, a iloraz liczb naturalnych jako ułamek zwykły;	
3) skraca i rozszerza ułamki zwykłe;	
4) sprowadza ułamki zwykłe do wspólnego mianownika;	
5) przedstawia ułamki niewłaściwe w postaci liczby mieszanej, a liczbę mieszaną w postaci ułamka niewłaściwego;	
6) zapisuje wyrażenia dwumianowane w postaci ułamka dziesiętnego i odwrotnie;	
7) zaznacza ułamki zwykłe i dziesiętne na osi liczbowej oraz odczytuje ułamki zwykłe i dziesiętne zaznaczone na osi liczbowej;	
8) zapisuje ułamki dziesiętne skończone w postaci ułamków zwykłych;	
9) zamienia ułamki zwykłe o mianownikach będących dzielnikami liczb 10, 100, 1000 itd. na ułamki dziesiętne skończone dowolną metodą (przez rozszerzanie lub skracanie ułamków zwykłych, dzielenie licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora);	
10) zapisuje ułamki zwykłe o mianownikach innych niż wymienione w pkt 9 w postaci rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego (z użyciem wielokropka po ostatniej cyfrze), uzyskane w wyniku dzielenia licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora;	

11) w sytuacjach praktycznych zaokrągla ułamki dziesiętne do co najwyżej drugiego miejsca po przecinku (zł, gr, m, cm, mm, itp.);	Zaokrąglanie ułamków dziesiętnych ograniczono do zaokrąglania do co najwyżej drugiego miejsca po przecinku i dopisano kontekst praktyczny.
12) porównuje ułamki (zwykłe i dziesiętne);	
13) oblicza liczbę, której część jest podana (wyznacza całość, z której część określono za pomocą ułamka);	
14) wyznacza liczbę, która powstaje po powiększeniu lub pomniejszeniu o pewną część innej liczby.	
<b>V. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Uczeń:</b>	
1) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki zwykłe o mianownikach jedno- lub dwucyfrowych, a także liczby mieszane;	
2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki dziesiętne w pamięci (w przykładach najprostszych), pisemnie (w przypadku gdy ułamki mają razem co najwyżej 6 cyfr różnych od zera) i za pomocą kalkulatora (w przykładach trudniejszych);	Działania pisemne na ułamkach dziesiętnych uczeń wykonuje tylko w przypadku, gdy ułamki mają razem co najwyżej 6 cyfr różnych od zera.
3) wykonuje nieskomplikowane rachunki, w których występują jednocześnie ułamki zwykłe i dziesiętne;	Te treści występują w punkcie V.7.
3) porównuje ułamki z wykorzystaniem ich różnicy;	
4) oblicza ułamek danej liczby całkowitej;	
5) oblicza kwadraty i sześciany ułamków zwykłych i dziesiętnych oraz liczb mieszanych;	
7) oblicza wartości prostych wyrażeń arytmetycznych, stosując reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;	Te treści występują w punkcie V.7.
6) wykonuje działania na ułamkach dziesiętnych, używając własnych, poprawnych strategii lub za pomocą kalkulatora;	
7) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych, wymagających stosowania działań arytmetycznych na liczbach całkowitych lub na liczbach zapisanych za pomocą ułamków zwykłych, liczb mieszanych i ułamków dziesiętnych, także wymiernych ujemnych, z uwzględnieniem reguł dotyczących kolejności wykonywania działań, o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $-\frac{1}{2} : 0,25 + 5,25 : 0,05 - 7\frac{1}{2} \cdot (2,5 - 3\frac{2}{3}) + 1,25$ .	
<b>VI. Elementy algebry. Uczeń:</b>	
1) korzysta z nieskomplikowanych wzorów, w których występują oznaczenia literowe, opisuje wzór słowami;	
2) stosuje oznaczenia literowe nieznanymi wielkościami liczbowymi i zapisuje proste wyrażenie algebraiczne na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym, np. zapisuje obwód trójkąta o bokach: $a, a + 2, b$ ;	
3) rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą występującą po jednej stronie równania (poprzez zgadywanie, dopełnianie lub wykonanie działania odwrotnego), np. $\frac{x-2}{3} = 4$ .	
<b>VII. Proste i odcinki. Uczeń:</b>	

1) rozpoznaje i nazywa figury: punkt, prosta, półprosta, odcinek;	
2) rozpoznaje proste, <del>i</del> odcinki prostokątne i równoległe; <del>na przykład jak w sytuacji określonej w zadaniu: Odcinki AB i CD są prostokątne, odcinki CD i EF są równoległe oraz odcinki EF i DF są prostokątne. Określ wzajemne położenie odcinków DF oraz AB. Wykonaj odpowiedni rysunek.</del>	
3) rysuje pary odcinków prostokątnych i równoległych;	
4) mierzy odcinek z dokładnością do 1 mm;	
5) znajduje odległość punktu od prostej.	
<b>VIII. Kąty. Uczeń:</b>	
1) wskazuje w dowolnym kącie ramiona i wierzchołek;	
2) mierzy z dokładnością do 1° kąty mniejsze od 180°;	
3) rysuje kąt mniejszy od 180°;	
4) rozpoznaje kąt prosty, ostry i rozwarty;	
5) porównuje kąty;	
6) rozpoznaje kąty wierzchołkowe i przyległe oraz korzysta z ich własności.	
<b>IX. Wielokąty, koła i okręgi. Uczeń:</b>	
1) rozpoznaje i nazywa trójkąty ostrokątne, prostokątne, rozwartokątne, równoboczne i równoramienne;	
2) konstruuje trójkąt o danych trzech bokach i ustala możliwość zbudowania trójkąta <del>na podstawie nierówności trójkąta; o zadanych bokach;</del>	
3) stosuje twierdzenie o sumie kątów wewnętrznych trójkąta;	
4) rozpoznaje i nazywa: kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok i trapez;	
5) zna najważniejsze własności kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku i trapezu, rozpoznaje figury osiowoosymetryczne i wskazuje osie symetrii figur;	
6) wskazuje na rysunku cięciwę, średnicę oraz promień koła i okręgu;	
7) rysuje cięciwę koła i okręgu, a także, jeżeli dany jest środek okręgu, promień i średnicę;	
8) w trójkącie równoramionym wyznacza przy danym jednym kącie: miary pozostałych kątów; <del>oraz</del> przy danym obwodzie i długości jednego boku – długości pozostałych boków.	
<b>X. Bryły. Uczeń:</b>	
1) rozpoznaje graniastosłupy proste, ostrosłupy, walce, stożki i kule w sytuacjach praktycznych i wskazuje te bryły wśród innych modeli brył;	
2) wskazuje wśród graniastosłupów prostokątności i sześciiany <del>i</del> <del>oraz</del> uzasadnia swój wybór;	
3) rozpoznaje siatki graniastosłupów prostych i ostrosłupów;	
4) rysuje siatki prostokątności;	
5) wykorzystuje podane zależności między długościami krawędzi graniastosłupa do wyznaczania długości poszczególnych krawędzi.	

<b>XI. Obliczenia w geometrii. Uczeń:</b>	
1) oblicza miary kątów, stosując przy tym poznane własności kątów i wielokątów;	Te treści były wcześniej w punkcie XI.7.
2) oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków;	
3) oblicza pola: trójkąta, kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu, przedstawionych na rysunku oraz w sytuacjach praktycznych, w tym także dla danych wymagających zamiany jednostek <b>i w sytuacjach z nietypowymi wymiarami, na przykład pole trójkąta o boku 1 km i wysokości 1 mm;</b>	
4) stosuje jednostki pola: mm <sup>2</sup> , cm <sup>2</sup> , dm <sup>2</sup> , m <sup>2</sup> , km <sup>2</sup> , ar, hektar (bez zamiany jednostek w trakcie obliczeń);	
5) oblicza pola wielokątów metodą podziału na mniejsze wielokąty lub uzupełniania do większych wielokątów jak w sytuacjach:  	
6) oblicza objętość i pole powierzchni prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi;	
7) stosuje jednostki objętości i pojemności: cm <sup>3</sup> , dm <sup>3</sup> , m <sup>3</sup> , mililitr, litr.	
<del>7) oblicza miary kątów, stosując przy tym poznane własności kątów i wielokątów.</del>	Treści z tego punktu przeniesiono do punktu XI.1.
<b>XII. Obliczenia praktyczne. Uczeń:</b>	
1) interpretuje 100% danej wielkości jako całość, 50% – jako połowę, 25% – jako jedną czwartą, 10% – jako jedną dziesiątą, a 1% – jako setną część danej wielkości liczbowej;	
2) w przypadkach osadzonych w kontekście praktycznym oblicza procent danej wielkości w stopniu trudności typu 50%, 10%, 20%;	
3) wykonuje proste obliczenia zegarowe na godzinach, minutach i sekundach;	
4) wykonuje proste obliczenia kalendarzowe na dniach, tygodniach, miesiącach, latach;	
5) odczytuje temperaturę (dodatnią i ujemną);	
6) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki długości: milimetr, centymetr, decymetr, metr, kilometr;	
7) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki masy: gram, dekagram, kilogram, tona;	
8) oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali oraz długość odcinka w skali, gdy dana jest jego rzeczywista długość;	
9) w sytuacji praktycznej oblicza: drogę przy danej prędkości i czasie, prędkość przy danej drodze i czasie, czas przy danej drodze i prędkości oraz stosuje jednostki prędkości km/h i m/s.	

<b>XIII. Elementy statystyki opisowej. Uczeń:</b>	
1) gromadzi i porządkuje dane;	
2) odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach, tabelach, na diagramach i na wykresach, np.: wartości z wykresu, wartość największą, najmniejszą, opisuje przedstawione w tekstach, tabelach, na diagramach i na wykresach zjawiska przez określenie przebiegu zmiany wartości danych, np. z użyciem określenia „wartości rosną”, „wartości maleją”, „wartości są takie same” („przyjmowana wartość jest stała”).	
<b>XIV. Zadania tekstowe. Uczeń:</b>	
1) czyta ze zrozumieniem tekst zawierający informacje liczbowe;	
2) wykonuje wstępne czynności ułatwiające rozwiązanie zadania, w tym rysunek pomocniczy lub wygodne dla niego zapisanie informacji i danych z treści zadania;	
3) dostrzega zależności między podanymi informacjami;	
4) dzieli rozwiązanie zadania na etapy, stosując własne, poprawne, wygodne dla niego strategie rozwiązania;	
5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody;	
6) weryfikuje wynik zadania tekstowego, oceniając sensowność rozwiązania np. poprzez szacowanie, sprawdzanie wszystkich warunków zadania, ocenianie rzędu wielkości otrzymanego wyniku;	
7) układa zadania i łamigłówki, rozwiązuje je; stawia nowe pytania związane z sytuacją w rozwiązywanym zadaniu.	

Treści nauczania według podstawy programowej – klasy VII–VIII	Komentarze
<b>I. Potęgi o podstawach wymiernych. Uczeń:</b>	
1) zapisuje iloczyn jednakowych czynników w postaci potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim;	
2) mnoży i dzieli potęgi o wykładnikach całkowitych dodatnich;	
3) mnoży potęgi o różnych podstawach i jednakowych wykładnikach;	
4) podnosi potęgę do potęgi;	
5) odczytuje i zapisuje liczby w notacji wykładniczej $a \cdot 10^k$ , gdzie $1 \leq a < 10$ , $k$ jest liczbą całkowitą.	
<b>II. Pierwiastki. Uczeń:</b>	
1) oblicza wartości pierwiastków kwadratowych i sześciennych z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześcianami liczb wymiernych;	
2) szacuje wielkość danego pierwiastka kwadratowego lub sześciennego oraz wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki;	
3) porównuje wartość wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki z daną liczbą wymierną oraz znajduje liczby wymierne większe lub mniejsze od takiej wartości, np. znajduje liczbę całkowitą taką, że $a \leq \sqrt{137} < a + 1$ ;	
4) oblicza pierwiastek z iloczynu i ilorazu dwóch liczb, wyłącza liczbę przed znak pierwiastka i włącza liczbę pod znak pierwiastka;	
5) mnoży i dzieli pierwiastki tego samego stopnia.	
<b>III. Tworzenie wyrażeń algebraicznych z jedną i z wieloma zmiennymi. Uczeń:</b>	
1) zapisuje wyniki podanych działań w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych;	
2) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych;	
3) zapisuje zależności przedstawione w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych;	
4) zapisuje rozwiązania zadań w postaci wyrażeń algebraicznych jak w przykładzie: Bartek i Grześ zbierali kasztany. Bartek zebrał $n$ kasztanów, Grześ zebrał 7 razy więcej. Następnie Grześ w drodze do domu zgubił 10 kasztanów, a połowę pozostałych oddał Bartkowi. Ile kasztanów ma teraz Bartek, a ile ma Grześ?	
<b>IV. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych. Sumy algebraiczne i działania na nich. Uczeń:</b>	
1) porządkuje jednomiany i dodaje jednomiany podobne (tzn. różniące się jedynie współczynnikiem liczbowym);	
2) dodaje i odejmuje sumy algebraiczne, <del>dokonując przy tym redukcji wyrazów podobnych</del> redukując wyrazy podobne;	
3) mnoży sumy algebraiczne przez jednomian i dodaje wyrażenia powstałe z mnożenia sum algebraicznych przez jednomiany;	
4) mnoży dwumian przez dwumian, <del>dokonując redukcji wyrazów podobnych</del> redukując wyrazy podobne.	

<b>V. Obliczenia procentowe. Uczeń:</b>	
1) przedstawia część wielkości jako procent tej wielkości;	
2) oblicza liczbę $a$ równą $p$ procent danej liczby $b$ ;	
3) oblicza, jaki procent danej liczby $b$ stanowi liczba $a$ ;	
4) oblicza liczbę $b$ , której $p$ procent jest równe $a$ ;	
5) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, również w przypadkach <b>wielokrotnych dwukrotnych</b> podwyżek lub obniżek danej wielkości.	Podwyżki i obniżki ograniczono do dwukrotnych.
<b>VI. Równania z jedną niewiadomą. Uczeń:</b>	
1) sprawdza, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania (stopnia pierwszego, drugiego lub trzeciego) z jedną niewiadomą, np. sprawdza, które liczby całkowite niedodatnie i większe od $-8$ są rozwiązaniami równania $\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} = 0$ ;	
2) rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą metodą równań równoważnych;	
3) rozwiązuje równania, które po prostych przekształceniach wyrażeń algebraicznych sprowadzają się do równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;	
4) rozwiązuje zdania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym także z obliczeniami procentowymi;	
5) przekształca proste wzory, aby wyznaczyć wskazaną wielkość we wzorach geometrycznych (np. pól figur) i fizycznych (np. dotyczących prędkości, drogi i czasu).	
<b>VII. Proporcjonalność prosta. Uczeń:</b>	
1) podaje przykłady wielkości wprost proporcjonalnych;	
2) wyznacza wartość przyjmowaną przez wielkość wprost proporcjonalną w przypadku konkretnej zależności proporcjonalnej, np. wartość zakupionego towaru w zależności od liczby sztuk towaru, <b>ilość zużytego paliwa od liczby przejechanych kilometrów, liczby przeczytanych stron książki w zależności od czasu jej czytania</b> ;	
3) stosuje podział proporcjonalny.	
<b>VIII. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie. Uczeń:</b>	
1) zna i stosuje twierdzenie o równości kątów wierzchołkowych (z wykorzystaniem zależności pomiędzy kątami przyległymi);	
2) przedstawia na płaszczyźnie dwie proste w różnych położeniach względem siebie, w szczególności proste prostopadłe i proste równoległe;	
3) korzysta z własności prostych równoległych, w szczególności stosuje równość kątów odpowiadających i naprzemianległych;	
4) zna i stosuje cechy przystawania trójkątów;	
<b>5) zna i stosuje własności trójkątów równoramiennych (równość kątów przy podstawie);</b>	Te treści są zawarte w punkcie VIII.6.
5) zna nierówność trójkąta $AB + BC \geq AC$ i wie, kiedy zachodzi równość;	



6) wykonuje proste obliczenia geometryczne, wykorzystując sumę kątów wewnętrznych trójkąta i własności trójkątów równoramiennych;	
7) zna i stosuje w sytuacjach praktycznych twierdzenie Pitagorasa (bez twierdzenia odwrotnego);	
8) przeprowadza dowody geometryczne nie trudniejsze niż w przykładach: a) dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny $ABC$ , w którym $AC = BC$ . W tym trójkącie poprowadzono wysokość $AD$ . Udowodnij, że kąt $ACB$ jest dwa razy większy od kąta $BAD$ , b) na bokach $BC$ i $CD$ prostokąta $ABCD$ zbudowano, na zewnątrz prostokąta, dwa trójkąty równoboczne $BCE$ i $CDF$ . Udowodnij, że $AE = AF$ .	
<b>IX. Wielokąty. Uczeń:</b>	
1) zna pojęcie wielokąta foremnego;	
2) stosuje wzory na pole trójkąta, prostokąta, kwadratu, równoległoboku, rombu, trapezu, a także do wyznaczania długości odcinków w zadaniach nie trudniejszych niż w przykładach: a) oblicz najkrótszą wysokość trójkąta prostokątnego o bokach długości: 5 cm, 12 cm i 13 cm, b) przekątne rombu $ABCD$ mają długości $AC = 8$ dm i $BD = 10$ dm. Przekątną $BD$ rombu przedłużono do punktu $E$ w taki sposób, że odcinek $BE$ jest dwa razy dłuższy od tej przekątnej. Oblicz pole trójkąta $CDE$ . (Zadanie ma dwie odpowiedzi.)	
<b>X. Oś liczbowa. Uczeń:</b>	
1) zaznacza na osi liczbowej zbiory liczb spełniających warunek taki jak $x \geq 1,5$ lub taki jak $x < -\frac{4}{7}$ ;	
2) znajduje współrzędne danych (na rysunku) punktów kratowych w układzie współrzędnych na płaszczyźnie;	
3) rysuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty kratowe o danych współrzędnych całkowitych (dowolnego znaku);	
4) znajduje środek odcinka, którego końce mają dane współrzędne (całkowite lub wymierne) oraz znajduje współrzędne drugiego końca odcinka, gdy dany jest jeden koniec i środek;	
5) oblicza długość odcinka, którego końce są danymi punktami kratowymi w układzie współrzędnych;	
6) dla danych punktów kratowych $A$ i $B$ znajduje inne punkty kratowe należące do prostej $AB$ .	
<b>XI. Geometria przestrzenna. Uczeń:</b>	
1) rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy – w tym proste i prawidłowe;	
2) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów prostych, prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe o poziomie trudności nie większym niż w przykładowym zadaniu: Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, którego dwa kąty mają miarę po $45^\circ$ , a najdłuższy bok ma długość $6\sqrt{2}$ dm. Jeden z boków prostokąta, który jest w tym graniastosłupie ścianą boczną o	

największej powierzchni, ma długość 4 dm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastopu.	
<p>3) oblicza objętości <b>ostrosłupów</b> i pola powierzchni ostrosłupów prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe w zadaniach nie trudniejszych niż w przykładzie:</p> <p>Prostokąt <math>ABCD</math> jest podstawą ostrosłupa <math>ABCDS</math>, punkt <math>M</math> jest środkiem krawędzi <math>AD</math>, odcinek <math>MS</math> jest wysokością ostrosłupa. Dane są następujące długości krawędzi: <math>AD = 10</math> cm, <math>AS = 13</math> cm oraz <math>AB = 20</math> cm.</p> <p>Oblicz objętość ostrosłupa.</p>	
<b>XII. Wprowadzenie do kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa.</b>	
Uczeń:	
1) wyznacza zbiory obiektów, analizuje i oblicza, ile jest obiektów, mających daną własność, w przypadkach niewymagających stosowania reguł mnożenia i dodawania;	
2) przeprowadza proste doświadczenia losowe, polegające na rzucie monetą, rzucie sześcienną kostką do gry, rzucie kostką wielościenną lub losowaniu kul spośród zestawu kul, analizuje je i oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych.	
<b>XIII. Odczytywanie danych i elementy statystyki opisowej.</b> Uczeń:	
1) interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów, w tym także wykresów w układzie współrzędnych;	
2) tworzy diagramy słupkowe i kołowe oraz wykresy liniowe na podstawie zebranych przez siebie danych lub danych pochodzących z różnych źródeł;	
3) oblicza średnią arytmetyczną kilku liczb.	
<b>XIV. Długość okręgu i pole koła.</b> Uczeń:	Ten dział należy zrealizować przed egzaminem ósmoklasisty.
1) oblicza długość okręgu o danym promieniu lub danej średnicy;	
2) oblicza promień lub średnicę okręgu o danej długości okręgu;	
3) oblicza pole koła o danym promieniu lub danej średnicy;	
4) oblicza promień lub średnicę koła o danym polu.	
<del>5) oblicza pole pierścienia kołowego o danych promieniach lub średnicach obu okręgów tworzących pierścienia.</del>	
<b>XV. Symetrie.</b> Uczeń:	Ten dział może zostać zrealizowany po egzaminie ósmoklasisty.
1) rozpoznaje symetralną odcinka i dwusieczną kąta;	
2) zna i stosuje w zadaniach podstawowe własności symetralnej odcinka	

<p>i dwusiecznej kąta jak w <del>przykładzie przykładowym zadaniu</del>: Wierzchołek <math>C</math> rombu <math>ABCD</math> leży na symetralnych boków <math>AB</math> i <math>AD</math>. Oblicz miary kątów tego rombu;</p>	
<p>3) rozpoznaje figury osiowosymetryczne i wskazuje ich osie symetrii oraz uzupełnia figurę do figury osiowosymetrycznej przy danych: osi symetrii figury i części figury;</p>	
<p>4) rozpoznaje figury środkowosymetryczne i wskazuje ich środki symetrii.</p>	
<p><del>XVI. Zaawansowane metody zliczania. Uczeń:</del></p>	
<p><del>1) stosuje regułę mnożenia do zliczania par elementów o określonych właściwościach;</del></p>	
<p><del>2) stosuje regułę dodawania i mnożenia do zliczania par elementów w sytuacjach wymagających rozważenia kilku przypadków, na przykład w zliczaniu liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 5 i mających trzy różne cyfry albo jak w zadaniu: W klasie jest 14 dziewczynek i 11 chłopców. Na ile sposobów można z tej klasy wybrać dwuosobową delegację składającą się z jednej dziewczynki i jednego chłopca?</del></p>	
<p><del>XVII. Rachunek prawdopodobieństwa. Uczeń:</del></p>	
<p><del>1) oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach, polegających na rzucie dwiema kostkami lub losowaniu dwóch elementów ze zwracaniem;</del></p>	
<p><del>2) oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach, polegających na losowaniu dwóch elementów bez zwracania; jak w przykładzie: Z urny zawierającej kule ponumerowane liczbami od 1 do 7 losujemy bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczb na wylosowanych kulach będzie parzysta.</del></p>	

## Warunki i sposoby realizacji

W warunkach i sposobie realizacji zmieniono zapis dotyczący realizacji działań po egzaminie ósmoklasisty. Dział XIV podstawy programowej dla klas VII–VIII należy zrealizować przed egzaminem ósmoklasisty, a dział XV może zostać zrealizowany po egzaminie.

Ponadto dodano nowe punkty *Sprawność rachunkowa* i *Ułamki zwykłe* oraz zmieniono fragment dotyczący kalkulatorów (pojawiają się też w punkcie dotyczącym *Statystyki*). Oto ich brzmienie:

### 2. Sprawność rachunkowa.

Umiejętność wykonywania działań w pamięci, poza ćwiczeniem pamięci i koncentracji, rozwija i wspomaga zdolność przeprowadzania rozumowania. Pożądaną umiejętnością u ucznia jest, aby mając do obliczenia  $23 + 49 + 77$ , zauważył, że  $23 + 77 = 100$ , a więc ostateczny wynik sumy jest równy 149.

Wykonywanie działań pisemnie jest wstępem do bardziej zaawansowanych zagadnień. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie pisemne przygotowuje do dodawania, odejmowania i mnożenia sum algebraicznych. Dzielenie pisemne przygotowuje do dzielenia wielomianu przez wielomian. Niemniej, wykonywanie działań pisemnych nie powinno prowadzić do uciążliwych rachunków.

### 3. Ułamki zwykłe.

Uczeń powinien dobrze poznać i stosować zasady dodawania i odejmowania, mnożenia i dzielenia, oraz rozszerzania i skracania ułamków zwykłych. Aby dobrze opanować podstawowe działania na ułamkach, umiejętność tę należy systematycznie utrzymywać na II. etapie nauczania.

### 4. Kalkulatory. Uczeń powinien umieć korzystać z nowoczesnych metod wykonywania obliczeń, w tym za pomocą kalkulatora.

Uczeń powinien zapoznać się z ograniczeniami (niektórych) kalkulatorów, mianowicie obliczenie pierwiastka z liczby całkowitej i podniesienie go do kwadratu niekoniecznie prowadzi do wyjściowej liczby, ze względu na błąd zaokrąglenia. Z tego samego powodu obliczenie rozwinięcia dziesiętnego za pomocą kalkulatora a następnie pomnożenie na kalkulatorze przez mianownik, niekoniecznie musi prowadzić do liczby całkowitej równej licznikowi. Inną sprawą jest znajdowanie rozwinięć okresowych za pomocą kalkulatora: jeśli kalkulator wypisuje rozwinięcie dziesiętne ułamka jako na przykład 0,463417171, to uczeń powinien wiedzieć, że może to oznaczać zarówno 0,46341(71), jak i 0,463(417171), a nawet 0,4634171(70); naturalnie istnieją jeszcze inne możliwości.

## Liceum i technikum

Poniżej zamieszczamy treści nauczania matematyki w kształceniu ogólnym dla liceum ogólnokształcącego i technikum oraz wybrane fragmenty warunków realizacji tych treści ujęte w podstawie programowej dla liceum ogólnokształcącego i technikum zawartej w rozporządzeniu MEN obowiązującym od 1 września 2024 roku. Kolorem czerwonym zaznaczono treści usunięte, a kolorem zielonym – treści dodane do danego zakresu. Przy wybranych treściach umieszczono komentarze, symbol \* oznacza treści ujęte w zakresie rozszerzonym.

Treści nauczania według podstawy programowej – Liceum Ogólnokształcące i Technikum	Komentarze
<b>I. Liczby rzeczywiste.</b>	
<b>Zakres podstawowy. Uczeń:</b>	
1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;	
2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia <del>nie trudniejsze niż, np.:</del> a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych, b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 4 <del>5</del> daje resztę 3, to <del>nie jest kwadratem liczby całkowitej jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;</del>	Zmiana treści przykładu b) na taki, który zamiast wzoru skróconego mnożenia $(a \mp b)^3$ wykorzystuje wzór $(a \mp b)^2$ .
3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;	
4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;	
5) stosuje <del>własności</del> monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$ , to $a^x < a^y$ , zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$ , to $a^x > a^y$ ;	
6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;	
7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania <del>i nierówności</del> typu: $ x + 4  = 5$ , <del><math> x - 2  &lt; 3</math>, <math> x + 3  \geq 4</math>;</del>	Część treści z tego punktu usunięto - pozostawiono je w zakresie rozszerzonym, punkt *III.4.
8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów;	
9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.	
<b>Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</b>	
stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.	
<b>II. Wyrażenia algebraiczne.</b>	
<b>Zakres podstawowy. Uczeń:</b>	

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$ , $(a - b)^2$ , $a^2 - b^2$ <del><math>(a + b)^3</math>, <math>(a - b)^3</math>, <math>a^3 - b^3</math>, <math>a^n - b^n</math>;</del>	Wzory $(a + b)^3$ , $(a - b)^3$ , $a^3 - b^3$ , $a^n - b^n$ przeniesiono do zakresu rozszerzonego, punkt *II.5.
2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;	
3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;	
4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$ ;	Treści z tego punktu przeniesiono do zakresu rozszerzonego, punkt *II.2.
5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;	Treści z tego punktu usunięto - pozostawiono je w zakresie rozszerzonym, punkt *II.3.
6) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$ ;	Treści z tego punktu przeniesiono do zakresu rozszerzonego, punkt *II.1.
4) 7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne.	
8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, np.: w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$	Treści z tego punktu przeniesiono do zakresu rozszerzonego, punkt *II.6.
<b>Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</b>	
1) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$ ;	Treść tego punktu przeniesiono z zakresu podstawowego, punkt II.6.
2) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów;	Treść tego punktu przeniesiono z zakresu podstawowego, punkt II.4.
3) 1) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;	Część treści z tego punktu usunięto.
4) 2) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0} = 1$ , $\binom{n}{1} = n$ , $\binom{n}{n-1} = n$ , $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ , $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ ;	
5) 3) korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3$ , $a^3 - b^3$ , $a^n - b^n$ ; $(a + b)^n$ i $(a - b)^n$ ;	Część treści tego punktu przeniesiono z zakresu podstawowego, punkt II.1.
6) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, np.: $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}$ .	Treść tego punktu przeniesiono z zakresu podstawowego, punkt II.8.
<b>III. Równania i nierówności.</b>	
<b>Zakres podstawowy. Uczeń:</b>	
1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny, w tym np. przekształca równoważnie równanie $\frac{5}{x+1} = \frac{x+3}{2x-1}$ ;	Dopisano przykład.

2) interpretuje równania i nierówności <b>liniowe</b> sprzeczne oraz tożsamościowe;	
3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;	
4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;	
<del>5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;</del>	Treści z tego punktu przeniesiono do zakresu rozszerzonego, punkt *III.6.
<del>5) 6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci <math>W(x) = 0</math> dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.</del>	Część treści z tego punktu przeniesiono do zakresu rozszerzonego, punkt *III.1.
<del>7) rozwiązuje równania wymierne postaci <math>\frac{V(x)}{W(x)} = 0</math>, gdzie wielomiany <math>V(x)</math> i <math>W(x)</math> są zapisane w postaci iloczynowej.</del>	Treści z tego punktu przeniesiono do zakresu rozszerzonego, punkt *III.7.
<b>Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</b>	
1) rozwiązuje <b>równania wielomianowe postaci <math>W(x) = 0</math> oraz</b> nierówności wielomianowe typu: $W(x) > 0$ , $W(x) \geq 0$ , $W(x) < 0$ , $W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;	Część treści tego punktu przeniesiono z zakresu podstawowego, punkt III.6.
2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne, <b>które dadzą się sprowadzić do równania lub nierówności liniowej lub kwadratowej nie trudniejsze niż</b> $\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$ ;	Usunięto przykład oraz doprecyzowano typ równania i nierówności.
3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych;	
4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną; <b>o stopniu trudności nie większym niż:</b> $2 x+3  + 3 x-1  = 13$ , $ x+2  + 2 x-3  < 11$ ;	Usunięto przykład.
5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności: wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają <b>określone znaki, bądź należą do określonego przedziału, zadaną własność,</b> i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów;	Doprecyzowano ten punkt.
<b>6) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;</b>	Treść tego punktu przeniesiono z zakresu podstawowego, punkt III.5.
<b>7) rozwiązuje równania wymierne postaci <math>\frac{V(x)}{W(x)} = 0</math>, gdzie wielomiany <math>V(x)</math> i <math>W(x)</math> są zapisane w postaci iloczynowej.</b>	Treść tego punktu przeniesiono z zakresu podstawowego, punkt III.7.
<b>IV. Układy równań.</b>	
<b>Zakres podstawowy. Uczeń:</b>	
1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;	
2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.	

<p>3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci <math>\begin{cases} ax + by = e \\ x^2 + y^2 + cx + dy = f \end{cases}</math> lub <math>\begin{cases} ax + by = e \\ y = cx^2 + dx + f \end{cases}</math></p>	<p>Treść tego punktu ujęto w zakresie rozszerzonym, punkt *IV.</p>
<p><b>Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</b></p>	
<p>rozwiązuje układy równań kwadratowych postaci liniowych i kwadratowych z dwiema niewiadomymi, które można sprowadzić do równania kwadratowego lub liniowego, a które nie są trudniejsze niż <math>\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = c \\ x^2 + y^2 + dx + ey = f \end{cases}</math></p>	<p>Zmiana sformułowania.</p>
<p><b>V. Funkcje.</b></p>	
<p><b>Zakres podstawowy. Uczeń:</b></p>	
<p>1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);</p>	
<p>2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;</p>	
<p>3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;</p>	
<p>4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;</p>	
<p>5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;</p>	
<p>6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;</p>	
<p>7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem;</p>	
<p>8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);</p>	
<p>9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;</p>	
<p>10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;</p>	
<p>11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;</p>	
<p>12) na podstawie wykresu funkcji <math>y = f(x)</math> szkicuje wykresy funkcji <math>y = f(x - a)</math>, <math>y = f(x) + b</math>, <del><math>y = -f(x)</math></del>, <del><math>y = f(-x)</math></del>;</p>	<p>Część treści z tego punktu przeniesiono do zakresu rozszerzonego, punkt *V.1.</p>
<p>13) postępuje się funkcją <math>f(x) = \frac{a}{x}</math>, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;</p>	
<p>14) postępuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.</p>	



<b>Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</b>	
1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykresy funkcji $y = -f(x)$ , $y = f(-x)$ <del><math>y =  f(x) </math></del> ;	Część treści usunięto oraz część treści z tego punktu przeniesiono z zakresu podstawowego, punkt V.12.
2) posługuje się złożeniami funkcji;	
3) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem, jak w przykładzie: wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ jest monotoniczna w przedziale $(-\infty, -2)$ .	
<b>VI. Ciągi.</b>	
<b>Zakres podstawowy. Uczeń:</b>	
1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;	
2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie; <del>jak w przykładach:</del> a) <del><math>\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0,001 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} a_n (1 - a_n) \end{array} \right., b) \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{array} \right.</math></del> ;	Usunięto przykłady.
3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący czy malejący;	
4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;	
5) stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;	
6) stosuje wzór na $n$ -ty wyraz i na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;	
7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.	
<b>Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</b>	
1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$ , $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;	
2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.	
<b>VII. Trygonometria.</b>	
<b>Zakres podstawowy. Uczeń:</b>	
1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od $0^\circ$ do $180^\circ$ , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$ ;	
<del>2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;</del>	Treści te ujęto w sposobach realizacji.
<del>3) znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;</del>	Treści te ujęto w sposobach realizacji.
2) 4) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ;	

<p>3) 5) stosuje twierdzenie <del>a sinusów</del> i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta  <math>P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma</math>.</p>	<p>Część treści z tego punktu (twierdzenie sinusów) przeniesiono do zakresu rozszerzonego, punkt *VII.7.</p>
<p>4) 6) oblicza kąty trójkąta <b>prostokątnego</b> i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty <b>prostokątne, w tym z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych</b>).</p>	<p>Doprecyzowano ten punkt w zakresie podstawowym. W niezmienionej formie treści z tego punktu przeniesiono do zakresu rozszerzonego, punkt *VII.8.</p>
<p><b>Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</b></p>	
<p>1) stosuje miarę łukową, zamienia <b>stopnie na radiany</b> <del>miarę łukową kąta na stopniową</del> i odwrotnie;</p>	
<p>2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;</p>	
<p>3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;</p>	
<p>4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;</p>	
<p>5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;</p>	
<p>6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne; <del>o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: <math>4 \cos 2x \cos 5x - 2 \cos 7x + 1</math>, <math>2 \sin^2 x \leq -1</math>.</del></p>	<p>Część treści z tego punktu usunięto.</p>
<p><b>7) stosuje twierdzenie sinusów;</b></p>	<p>Treść tego punktu przeniesiono z zakresu podstawowego, punkt VII.5.</p>
<p><b>8) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).</b></p>	<p>Treść tego punktu przeniesiono z zakresu podstawowego, punkt VII.6.</p>
<p><b>VIII. Planimetria.</b></p>	
<p><b>Zakres podstawowy. Uczeń:</b></p>	
<p>1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;</p>	
<p>2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;</p>	
<p>3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;</p>	
<p>4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombów i trapezach;</p>	
<p>5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;</p>	
<p>6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu;</p>	

<p>7) stosuje twierdzenia: Talesa, <del>odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;</del></p>	<p>Część treści z tego punktu (twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa) przeniesiono do zakresu rozszerzonego, punkt *VIII.2. Część treści (twierdzenie o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą) usunięto z obu zakresów. Twierdzenie o dwusiecznej pozostało w wykazie twierdzeń i dowodów dla zakresu podstawowego.</p>
<p>8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;</p>	
<p>9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;</p>	
<p>10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;</p>	
<p><del>11)</del> <del>12)</del> przeprowadza dowody geometryczne;</p>	<p>Zmieniono kolejność punktów 11 i 12.</p>
<p><del>12)</del> <del>11)</del> stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur.</p>	<p>Zmieniono kolejność punktów 11 i 12.</p>
<p><b>Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</b></p>	
<p>1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu;</p>	
<p>2) stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.</p>	<p>Treść tego punktu przeniesiono z zakresu podstawowego, punkt *VIII.7.</p>
<p><b>IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.</b></p>	
<p><b>Zakres podstawowy. Uczeń:</b></p>	
<p>1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;</p>	
<p>2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość <del>lub prostopadłość</del> do innej prostej, <del>styczność do okręgu</del>);</p>	<p>Część treści z tego punktu przeniesiono do zakresu rozszerzonego, punkt *IX.4.</p>
<p>3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;</p>	
<p>4) posługuje się równaniem okręgu <math>(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2</math>;</p>	
<p><del>5) oblicza odległość punktu od prostej;</del></p>	<p>Treści z tego punktu usunięto z zakresu podstawowego.</p>

6) <del>znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;</del>	Część treści z tego punktu (wyznaczanie punktów wspólnych prostej i okręgu) przeniesiono do zakresu rozszerzonego, punkt *IX.1. Wyznaczanie punktów wspólnych prostej i paraboli usunięto z obu zakresów.
5) <del>7)</del> wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).	
<b>Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</b>	
<del>1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej;</del>	Treści z tego punktu usunięto.
1) <del>2)</del> <b>znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;</b>	Treść tego punktu przeniesiono z zakresu podstawowego, punkt IX.6.
2) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów;	
3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie;	
<b>4) wyznacza równanie prostej prostopadłej do zadanej prostej i prostej stycznej do danego okręgu.</b>	Treść tego punktu przeniesiono z zakresu podstawowego, punkt IX.2.
<b>X. Stereometria.</b>	
<b>Zakres podstawowy. Uczeń:</b>	
1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;	
2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;	
3) rozpoznaje w graniastopłach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;	
4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;	
<del>5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;</del>	Treść tego punktu usunięto z obu zakresów.
5) <del>6)</del> oblicza objętości i pola powierzchni graniastopłów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii <del>i poznanych twierdzeń;</del>	Zmiana sformułowania.
6) <del>7)</del> wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.	
<b>Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</b>	
1) zna i stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostopadłych;	

2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.	
<b>XI. Kombinatoryka.</b>	
<b>Zakres podstawowy. Uczeń:</b>	
1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;	
2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności <del>w sytuacjach nie trudniejszych niż, np.:</del> a) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2, b) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.	Zmiana sformułowania.
<b>Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</b>	
1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji <del>również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;</del>	Zmiana sformułowania.
2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.	
<b>XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.</b>	
<b>Zakres podstawowy. Uczeń:</b>	
1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;	
<del>2) stosuje skalę centylową;</del>	Treść tego punktu usunięto z obu zakresów.
<del>2) 3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę.</del>	
<del>4) oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych;</del>	Treść tego punktu usunięto z obu zakresów.
<del>5) oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.</del>	Treść tego punktu usunięto z obu zakresów.
<b>Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</b>	
1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym;	
2) stosuje schemat Bernoullego.	
<b>XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.</b>	
<b>Zakres podstawowy. Uczeń:</b>	
rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.	
<b>Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</b>	
1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);	

2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji <del>z znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego;</del>	Część treści z tego punktu usunięto.
3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;	
4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;	
5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;	
6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.	

### Warunki i sposoby realizacji

W warunkach i sposobie realizacji dopisano punkt dotyczący funkcji trygonometrycznych oraz zmieniono listę twierdzeń i dowodów które powinni poznać uczniowie.

Oto brzmienie punktu dotyczącego funkcji trygonometrycznych oraz lista twierdzeń:

#### 11. Funkcje trygonometryczne.

Funkcje trygonometryczne, oprócz szerokich zastosowań w fizyce, służą do opisu związków miarowych w figurach płaskich oraz bryłach (np. twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów). W wielu sytuacjach dla danego argumentu nie są potrzebne dokładne wartości tych funkcji, tylko ich przybliżenia. Uczniowie powinni umieć korzystać z tablic matematycznych jak i kalkulatora w dwóch celach: wyznaczania przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta oraz określenia kąta, dla którego funkcja trygonometryczna osiąga określoną wartość.

#### Twierdzenia, dowody – zakres podstawowy

1. Istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych.
2. Niewymierność liczb:  $\sqrt{2}$ ,  $\log_2 5$  itp.
3. Wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego.
4. Podstawowe własności potęg (o wykładnikach całkowitych i wymiernych) i logarytmów.
- ~~5. Twierdzenie o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci  $x - a$  wraz ze wzorami rekurencyjnymi na współczynniki ilorazu i resztę (algorytm Hornera) – dowód można przeprowadzić w szczególnym przypadku, np. dla wielomianu czwartego stopnia.~~  
(przeniesiono do poziomu rozszerzonego)
- ~~5. 6.~~ Wzory na  $n$ -ty wyraz i sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.
- ~~6. 7.~~ Twierdzenie o kątach w okręgu:
  - 1) kąt wpisany jest połową kąta środkowego opartego na tym samym łuku;
  - 2) jeżeli dwa kąty są wpisane w ten sam okrąg, to są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na równych łukach.

**7. 8.** Twierdzenie o odcinkach w trójkącie prostokątnym. Jeśli odcinek  $CD$  jest wysokością trójkąta prostokątnego  $ABC$  o kącie prostym  $ACB$ , to  $2|AD| \cdot |BD| = |CD|^2$ ,  
 $|AC|^2 = |AB| \cdot |AD|$  oraz  $|BC|^2 = |AB| \cdot |BD|$ .

**8. 9.** Twierdzenie o dwusiecznej. Jeśli prosta  $CD$  jest dwusieczną kąta  $ACB$  w trójkącie  $ABC$  i punkt  $D$  leży na boku  $AB$ , to  $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$ .

**9. 10.** Wzór na pole trójkąta  $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$

**11. Twierdzenie sinusów.**  
**(przeniesiono do poziomu rozszerzonego)**

**10. 12.** Twierdzenie cosinusów i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

#### Twierdzenia, dowody – zakres rozszerzony

1. Dowód kombinatoryczny tożsamości: jeśli  $0 < k < n$ , to  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ .

2. Wzór dwumianowy Newtona. Wzory skróconego mnożenia na  $a^n \pm b^n$  (przy odpowiednich założeniach o  $n$ ) oraz jako wniosek: dla liczb całkowitych  $a$  i  $b$ ,  $(a-b)|(a^n - b^n)$ .

**3. Twierdzenie o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci  $x - a$  wraz ze wzorami rekurencyjnymi na współczynniki ilorazu i resztę (algorytm Hornera) – dowód można przeprowadzić w szczególnym przypadku, np. dla wielomianu czwartego stopnia.**  
**(przeniesione z poziomu podstawowego)**

**4. 3.** Wzory Viète'a.

**5. 4.** Wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów.

**6. Twierdzenie sinusów.**  
**(przeniesione z poziomu podstawowego)**

**7. 5.** Twierdzenia o istnieniu niektórych punktów szczególnych trójkąta:

a) symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie i (jako wniosek) proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie,

b) środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

**8. 6.** Twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg. Czworokąt wypukły  $ABCD$  można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy  $|\angle BAD| + |\angle BCD| = |\angle ABC| + |\angle ADC| = 180^\circ$ .

**9. 7.** Twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu. W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy  $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ .

**10.** ~~8.~~ Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny. Dane są proste  $k$ ,  $l$  i  $m$  leżące na jednej płaszczyźnie. Jeśli proste  $k$  i  $l$  mają dokładnie jeden punkt wspólny i prosta  $n$  jest do nich prostopadła, to prosta  $n$  jest także prostopadła do prostej  $m$ .

**11.** ~~9.~~ Twierdzenie o trzech prostopadłych. Prosta  $k$  przecina płaszczyznę  $P$  i nie jest do niej prostopadła. Prosta  $l$  jest rzutem prostokątnym prostej  $k$  na płaszczyznę  $P$ . Prosta  $m$  leży na płaszczyźnie  $P$ . Wówczas proste  $k$  i  $m$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy proste  $l$  i  $m$  są prostopadłe.