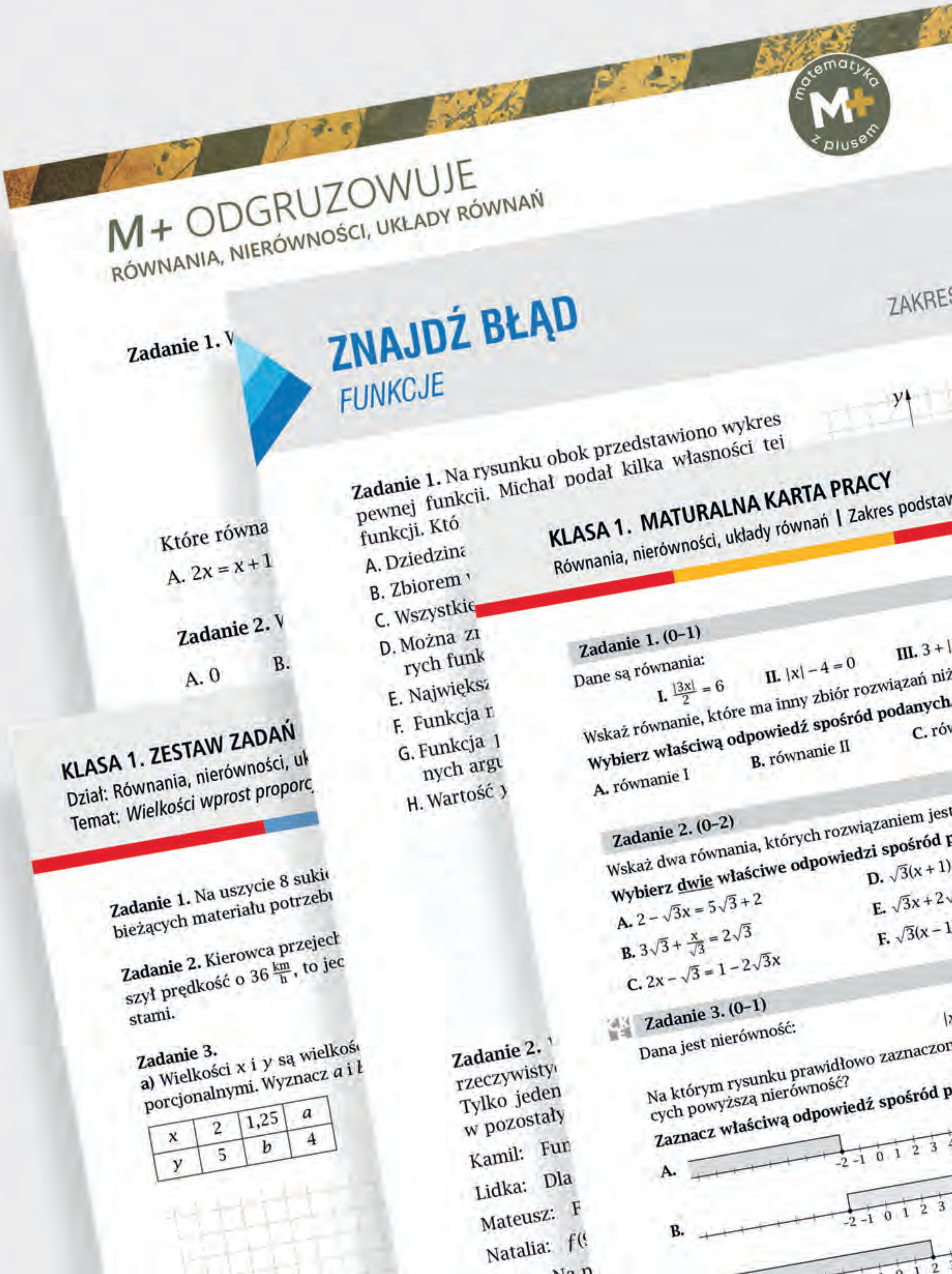
Znajdź błąd, Lekcje z wykopem, Rebusy matematyczne...

Wybrane materiały i pomoce dydaktyczne *M+* dla szkoły średniej



gdańskie wydawnictwo oświatowe

Spis treści

KLASA 1. ZESTAW ZADAŃ PODSTAWOWYCH

Dział: Równania, nierówności, układy równań

Temat: *Wielkości wprost proporcjonalne i odwrotnie proporcjonalne*

Zadanie 1. Na uszycie 8 sukienek krawcowa potrzebuje 9,6 metra bieżącego materiału. Oblicz, ile metrów bieżących materiału potrzebuje na uszycie 5 takich samych sukienek.

Zadanie 2. Kierowca przejechał trasę z Gdańska do Wrocławia ze średnią prędkością 96 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Gdyby zmniejszył prędkość o 36 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, to jechałby o trzy godziny dłużej. Oblicz, jaka jest odległość pomiędzy tymi miastami.

Zadanie 3.

a) Wielkości x i y są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Wyznacz a i b.

x	2	1,25	a
y	5	b	4

b) Wielkości x i y są wielkościami wprost proporcjonalnymi. Wyznacz c i d.

x	3	2,4	c
y	6	d	15

KLASA 1. MATURALNA KARTA PRACY

Równania, nierówności, układy równań | Zakres podstawowy

Zadanie 1. (0–1)

Dane są równania:

I. $\frac{|3x|}{2} = 6$ **II.** $|x| - 4 = 0$ **III.** $3 + |5 + x| = 4$ **IV.** $2|x| + 8 = 16$

Wskaż równanie, które ma inny zbiór rozwiązań niż trzy pozostałe.

Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. równanie I **B.** równanie II **C.** równanie III **D.** równanie IV

Zadanie 2. (0–2)

Wskaż dwa równania, których rozwiązaniem jest liczba niewymierna.

Wybierz <u>dwie</u> właściwe odpowiedzi spośród podanych.

A. $2 - \sqrt{3}x = 5\sqrt{3} + 2$

B. $3\sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

C. $2x - \sqrt{3} = 1 - 2\sqrt{3}x$

D. $\sqrt{3}(x + 1) = 2 + \sqrt{3}$

E. $\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 2 + x$

F. $\sqrt{3}(x - 1) + 2x = -2$

Zadanie 3. (0–1)

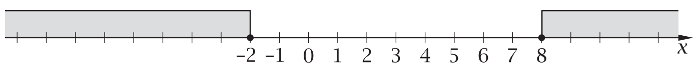
Dana jest nierówność:

$$|x - 3| \geqslant 5$$

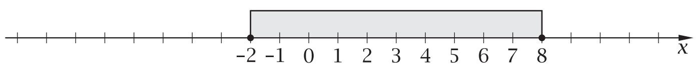
Na którym rysunku prawidłowo zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb spełniających powyższą nierówność?

Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

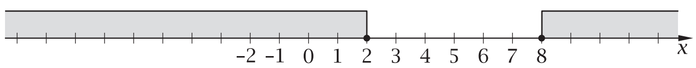
A.



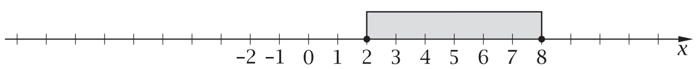
B.



C.

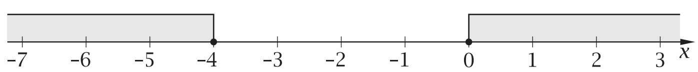


D.



Zadanie 4. (0–1)

Spośród nierówności A–D wybierz tę, której zbiór wszystkich rozwiązań zaznaczono na osi liczbowej.



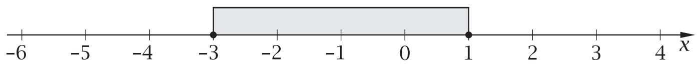
A. $|x + 2| \leqslant 2$ **B.** $|x - 2| \leqslant 2$ **C.** $|x + 2| \geqslant 2$ **D.** $|x - 2| \geqslant 2$

Zadanie 5. (0–1)

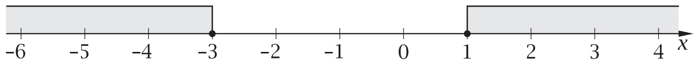
Spośród rysunków A–D wybierz ten, na którym prawidłowo zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających nierówność:

$$|x+1| \leqslant 2$$

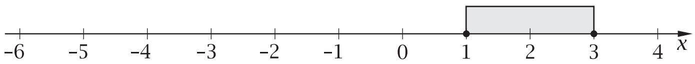
A.



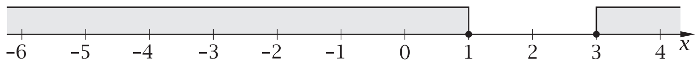
B.



C.



D.



Zadanie 6. (0–2)

Rozwiąż nierówność. Podaj największą liczbę całkowitą spełniającą tę nierówność.

$$2x \geqslant \sqrt{5} \cdot x + 3\sqrt{5} - 6$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 7.

Dany jest układ równań z niewiadomymi x i y:

$$\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ -8x + by = -2 \end{cases}$$

gdzie a i b są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

Zadanie 7.1. (0–1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Dla $a = 2$ i $b = 6$ podany układ jest nieoznaczony.	P	F
2.	Dla $a = -8$ i $b = -3$ podany układ jest sprzeczny.	P	F

Zadanie 7.2. (0–3)

Rozwiąż podany układ równań dla $a = \sqrt[3]{-32} \cdot \sqrt[3]{-2}$ i $b = |-4-5|$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–3)

Układ równań:

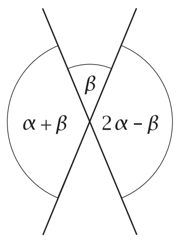
$$\begin{cases} 2ax + 3y = b \\ -3x + y = a + 1 \end{cases}$$

spełniony jest przez parę liczb $x = 5$ i $y = 12$ dla pewnych liczb rzeczywistych a i b.

Wyznacz liczby a i b. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0–2)

Dane są dwie przecinające się proste. Miary kątów utworzonych przez te proste zapisano za pomocą wyrażeń algebraicznych (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz <u>dwie</u> odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie poniższego zdania było prawdziwe.

Układem równań, w którym zapisano prawidłowe zależności między miarami kątów utworzonych przez te proste, jest układ:

A. $\begin{cases} (\alpha + \beta) + \beta = 90^\circ \\ \alpha + \beta = 2\alpha - \beta \end{cases}$

B. $\begin{cases} (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ \\ \alpha + \beta = 2\alpha - \beta \end{cases}$

C. $\begin{cases} (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ \\ \beta = 2\alpha - \beta \end{cases}$

D. $\begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \beta = 2\alpha - \beta \end{cases}$

E. $\begin{cases} \alpha + \beta = 2\alpha - \beta \\ 180^\circ - (2\alpha - \beta) = \beta \end{cases}$

F. $\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 360^\circ \\ 2\alpha - \beta = 2\beta \end{cases}$

Zadanie 10. (0–1)

Klient banku wypłacił z bankomatu kwotę 1040 zł. Bankomat wydał kwotę w banknotach o nominałach 20 zł, 50 zł oraz 100 zł. Banknotów 100-złotowych było dwa razy więcej niż 50-złotowych, a banknotów 20-złotowych było o 2 mniej niż 50-złotowych. Niech x oznacza liczbę banknotów 50-złotowych, a y — liczbę banknotów 20-złotowych, które otrzymał ten klient.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Poprawny układ równań prowadzący do obliczenia liczb x i y to:

A. $\begin{cases} 20y + 50x + 100 \cdot 2x = 1040 \\ y = x - 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 20y + 50x + 50x \cdot 2 = 1040 \\ y = x - 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 20y + 50x + 100 \cdot 2x = 1040 \\ x = y - 2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 20y + 50x + 50x \cdot 2 = 1040 \\ x = y - 2 \end{cases}$

Zadanie 11. (0–1)

Właściciel sklepu kupił w hurtowni 50 par identycznych spodni po x zł za parę i 40 identycznych marynarek po y zł za sztukę. Za zakupy w hurtowni zapłacił 8000 zł. Po doliczeniu marży 50% na każdą parę spodni i 20% na każdą marynarkę ceny detaliczne spodni i marynarki były jednakowe.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Cenę pary spodni x oraz cenę marynarki y, jakie trzeba zapłacić w hurtowni, można obliczyć z układu równań:

A. $\begin{cases} x + y = 8000 \\ 0{,}5x = 0{,}2y \end{cases}$

B. $\begin{cases} 50x + 40y = 8000 \\ 0{,}5x = 0{,}2y \end{cases}$

C. $\begin{cases} 50x + 40y = 8000 \\ 1{,}5x = 1{,}2y \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + y = 8000 \\ 1{,}5x = 1{,}2y \end{cases}$

Zadanie 12. (0–3)

Pies goni lisa. Początkowa odległość między zwierzętami równa była 30 m. Długość każdego skoku psa jest równa 2 m, długość każdego skoku lisa jest równa 1 m. W czasie, w którym lis wykonuje trzy skoki, pies skacze dwa razy.

Oblicz dystans, po przebiegnięciu którego pies dogoni lisa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 13. (0–2)

Dana jest liczba dwucyfrowa a, w której suma cyfr jest równa 14. Jeżeli zamienimy miejscami jej cyfry, otrzymamy liczbę o 18 mniejszą od liczby sprzed tej zamiany cyfr.

Oblicz liczbę a. Zapisz obliczenia.

Zadanie 14. (0–3)

Suma liczb rzeczywistych a i b równa jest 527. Wiemy, że 8% liczby a jest równe 7,5% liczby b.

Oblicz liczby a i b. Zapisz obliczenia.

Zadanie 15. (0–1)

Aby zaorać pole o powierzchni P w ciągu 8 godzin, potrzeba trzech ciągników. Przyjmijmy, że każdy ciągnik w ustalonej jednostce czasu może zaorać tę samą powierzchnię pola.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F — jeśli jest fałszywe.

1.	Zaoranie pola o powierzchni P przy pomocy dwóch ciągników zajęłoby 12 godzin.	P	F
2.	Cztery ciągniki, które pracują o połowę szybciej, zaorałyby to pole w ciągu 4 godzin.	P	F

Zadanie 16. (0–1)

Do wykonania pewnej pracy zatrudniono y robotników, którzy pracowali przez x godzin. Gdyby zatrudniono o 6 osób więcej, praca zostałaby ukończona w czasie o 30% krótszym. Wskaż równość, która opisuje tę sytuację.

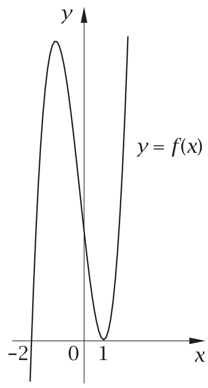
Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $xy = 0{,}7x(y+6)$ **B.** $\frac{x}{0{,}3x} = \frac{y-6}{y}$ **C.** $xy = 0{,}3x(y+6)$ **D.** $\frac{x}{0{,}7x} = \frac{y-6}{y}$

Zadanie 1. (0–3)

Funkcja wielomianowa f jest określona wzorem $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie a, b, c i d są pewnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$. Do wykresu funkcji f należy punkt $P = (-1, 16)$.

Fragment wykresu funkcji f w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono na rysunku.

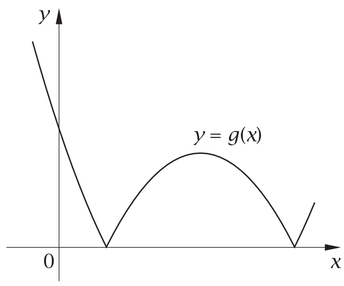


Wyznacz wartości współczynników a, b, c oraz d. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2.

Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = \left|-\frac{1}{4}x^2 + 3x - 5\right|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Fragment wykresu funkcji g w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono na rysunku (jednostki pominięto).



Zadanie 2.1. (0–2)

Wyznacz zbiór wszystkich wartości, jakie funkcja g przyjmuje w przedziale $\langle 9; 11 \rangle$. Zapisz obliczenia.

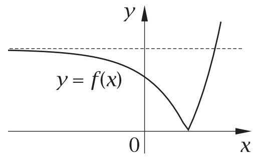
Zadanie 2.2. (0–2)

Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie $g(x) = |m|$ ma dokładnie dwa rozwiązania dodatnie.

Zadanie 3.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = |2^x - 3|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Fragment wykresu funkcji f w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono na rysunku (jednostki pominięto).



Zadanie 3.1. (0–2)

Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji f są większe od 2. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3.2. (0–2)

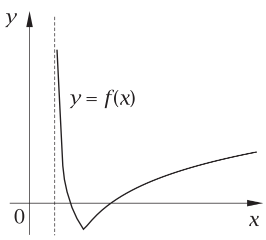
Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie $f(x) = |m - 1|$ ma dokładnie dwa rozwiązania dodatnie.

Zadanie 4.

Dane są funkcje f i g.

- Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = |\log_2(x-1)| - 1$ dla każdego $x \in (1; +\infty)$.
- Funkcja g dla każdej wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania $|\log_2(x-1)| = m + 1$.

Fragment wykresu funkcji f w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono na rysunku (jednostki pominięto).



Zadanie 4.1. (0–3)

Wyznacz miejsca zerowe oraz zbiór wartości funkcji f. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4.2. (0–2)

Wyznacz wzór funkcji g oraz naszkicuj jej wykres.

Zadanie 5. (0–3)

Dana jest funkcja f określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \log_3|x-2| & \text{dla } x \in (-\infty; 2) \\ 2|x-1|-3 & \text{dla } x \in \langle 2; +\infty) \end{cases}$$

Wyznacz miejsca zerowe funkcji f. Zapisz obliczenia.

Zadanie 6. (0–3)

Dana jest funkcja f określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+4 & \text{dla } x \in (-\infty; 1\rangle \\ x^2-4x+6 & \text{dla } x \in (1; 4) \\ 6 & \text{dla } x \in \langle 4; +\infty) \end{cases}$$

Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności oraz zbiór wartości funkcji f. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0–4)

Rozwiąż nierówność $-2(|x|-1)(x+2)^2(x^2-1) \geqslant 0$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–4)

Dana jest nierówność z niewiadomą x i parametrem $p \in \mathbb{R}$:

$$-(2x+p)(x^2+3x+2) < 0$$

Oblicz, dla jakiej wartości parametru p zbiorem rozwiązań tej nierówności jest przedział $(-1\,;+\infty)$. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0–4)

Dane są funkcje f i g określone wzorami dla każdej liczby rzeczywistej x:

$$f(x) = -3(x-2)^3(x+1)(x^2+4x+4) \qquad g(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 12$$

Wyznacz wszystkie argumenty x, dla których funkcje f i g przyjmują jednocześnie wartości ujemne. Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–2)

Wyznacz wszystkie liczby x, dla których spełniona jest równość:

$$\log_2\left(\log_2\left(\log_2\left(x^2+7\right)\right)\right) = 2^{\log_2 7} - 6$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–3)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = 5 + 2\log_3(x - 2p^2)$ dla każdej liczby rzeczywistej $x > 2p^2$, gdzie p jest pewną liczbą rzeczywistą.

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których punkt $A = (\sqrt{3} + 4, 6)$ należy do wykresu funkcji f. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0–3)

Wykaż, że nierówność $2^{x^2} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{3}{2}x} > \frac{1}{16}$ spełniona jest dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$.

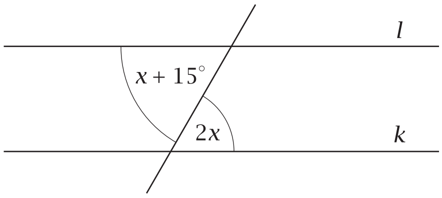
Zadanie 13. (0–4)

Wyznacz dziedzinę funkcji f określonej wzorem $f(x) = \log_{x^2-1}(x^3 + 5x^2 - 6x)$. Zapisz obliczenia.

M+ ODGRUZOWUJE

RÓWNANIA, NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ

Zadanie 1. Wiadomo, że proste l i k są równoległe (zob. rysunek).



Które równanie pozwala obliczyć x?

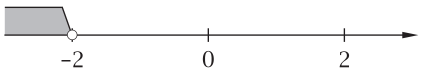
A. $2x = x + 15°$ B. $2x + x + 15° = 90°$ C. $2x + x + 15° = 180°$ D. $2x(x + 15°) = 0°$

Zadanie 2. Wskaż liczbę, która jest rozwiązaniem równania $\frac{-3(x+1)}{4} = 2(x+3) - 1{,}25$.

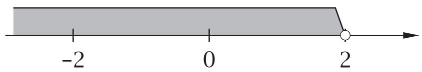
A. 0 B. -2 C. 2 D. $-\frac{1}{2}$

Zadanie 3. Na której osi liczbowej przedstawiono zbiór liczb spełniających warunek $x > 2$?

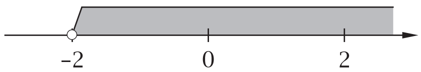
A.



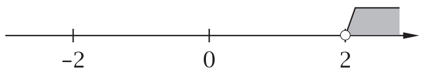
C.



B.



D.



Zadanie 4. Ułóż odpowiednie równanie.

a) Liczba o 3 większa od liczby x jest 3 razy większa od liczby x.

b) 120% liczby x jest o 7 większe niż połowa liczby x.

c) Jeżeli zmniejszymy liczbę x o 30%, to otrzymamy liczbę o 8 od niej mniejszą.

Zadanie 5. Wyznacz b ze wzoru $R = \frac{abc}{4P}$. Zapisz odpowiednie założenia.

Zadanie 6. Wyznacz x z podanego wzoru.

a) $R = \frac{s(d-2x)}{4}$

b) $y = \frac{2}{x-1}$

c) $y = \frac{2x}{x-1}$

Zadanie 7. Rozwiąż równanie.

a) $2(5x-4)-5(x-3)=x-2(3x-0{,}5)$

b) $x-2(x-1)=0{,}2(1-2x)$

c) $\frac{4x+7}{2}-\frac{5x-1}{6}=x+5$

d) $\frac{x+5}{4}-\frac{2x+1}{8}=\frac{1}{2}(2-x)$

Zadanie 8. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x+2)^2-3(x-1)(x+2)$

b) $(y-4)(y+4)+(2-y)(2+y)$

c) $(2a-3)^2-4(3a+2)^2$

d) $(2x-1)^3+3x(x+1)^2$

Zadanie 9. Rozwiąż równanie.

a) $(x+2)(x-1) = x^2 + 5x - 8$

b) $2a + a^2 - a(2+a) = a + 18$

c) $(a+2)(a-2) - 5a = 12 + a^2$

d) $(x-1)^2 = x^2 - 5$

Zadanie 10. Dopisz prawą stronę równania $15x - 5(2+3x) =$ .... tak, aby otrzymane równanie:

a) miało jedno rozwiązanie,

b) miało nieskończenie wiele rozwiązań,

c) nie miało rozwiązania.

Zadanie 11. Rozwiąż pierwsze równanie. W drugim równaniu uzupełnij brakujące zapisy tak, aby oba równania były równoważne.

1 $\frac{1}{2}(2-x) = 5$

2 $-2x +$ .... $= x + 4$

ZNAJDŹ BŁĄD

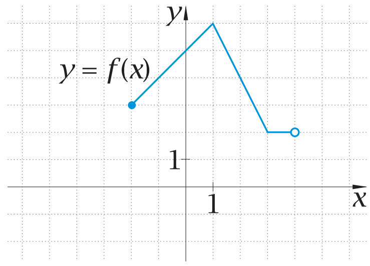
FUNKCJE

ZAKRES PODSTAWOWY

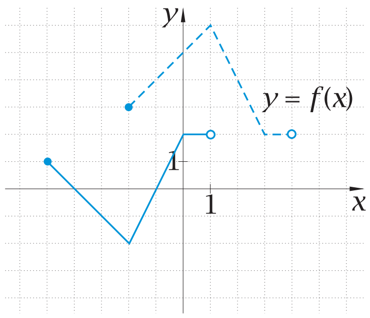
Zadanie 1. Tomek stwierdził, że żadne z poniższych równań nie ma rozwiązań. Oto jego rozwiązania. Czy są poprawne? Jeśli nie, popraw je.

Równanie A	Równanie B	Równanie C	Równanie D	Równanie E
$6^{x+1} = 3 \cdot 2^x$	$4^{2x+2} = (2^x)^2$	$\frac{15^x}{5} = 3^{x+2}$	$2^x \cdot 5^x = 10 \cdot 10^x$	$2^x \cdot 2^3 = 2^{3x+1}$
$6^{x+1} = 6^x$	$4^{2x+2} = 4^{2x}$	$3^x = 3^{x+2}$	$10^x = 10^{x+1}$	$2^{3x} = 2^{3x+1}$
$x + 1 = x$	$2x + 2 = 2x$	$x = x + 2$	$x = x + 1$	$3x = 3x + 1$
$1 = 0$	$2 = 0$	$0 = 2$	$0 = 1$	$0 = 1$
równanie sprzeczne	równanie sprzeczne	równanie sprzeczne	równanie sprzeczne	równanie sprzeczne

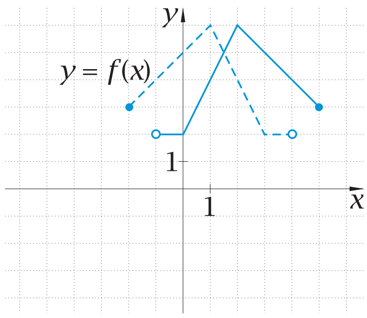
Zadanie 2. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$.
Które z poniższych wykresów narysowano błędnie?
Dorysuj poprawne wykresy.



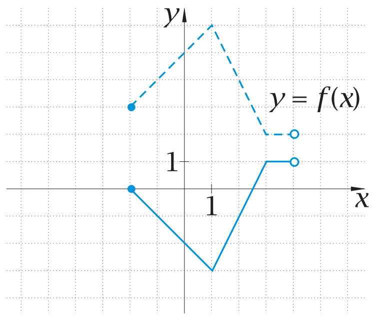
a) $y = -f(x - 3)$



b) $y = f(-x - 3)$



c) $y = -f(x) - 3$



Zadanie 1. Znajdź błędy w rozwiązaniach równań. Podaj poprawne rozwiązania.

Równanie A

$$\frac{0{,}5x-2}{4-x}=\frac{5-x}{2x-7}$$

Mnożymy „na krzyż” i otrzymujemy równanie:

$(0{,}5x-2)(2x-7)=(4-x)(5-x)$

$x^2-3{,}5x-4x+14=20-4x-5x+x^2$

$x^2-7{,}5x+14=20-9x+x^2$

$1{,}5x=6$, stąd $x=4$

Rozwiązaniem równania jest $x=4$.

Równanie B

$$\frac{3x-1}{x+4}=\frac{3x-1}{x+7}$$

Założenia: $x\neq-4$ i $x\neq-7$

Liczniki obu ułamków są równe, więc aby zachodziła równość ułamków mianowniki też muszą być równe.

Zatem:

$x+4=x+7$, czyli $4=7$

Wynika stąd, że jest to równanie sprzeczne.

Równanie C

$\frac{3x}{x-5}=\frac{2x}{x-5}$, założenie: $x\neq5$

Dzielimy obie strony równania przez x i otrzymujemy równanie: $\frac{3}{x-5}=\frac{2}{x-5}$

Mnożymy „na krzyż” i otrzymujemy równanie: $3x-15=2x-10$. Stąd $x=5$.

Otrzymana wartość x jest sprzeczna z założeniem, więc równanie jest sprzeczne.

Zadanie 2. Z równania $|x|=9$ wynika, że $x=9$ lub $x=-9$. Darek zastosował podobne rozumowanie, rozwiązując poniższe równania. Sprawdź otrzymane przez niego rozwiązania. Czy któreś jest poprawne?

Równanie 1.

$|x|=x-1$

$x=x-1$ lub $x=-(x-1)$

$0=-1$ lub $2x=1$

$x=\frac{1}{2}$

Równanie 2.

$|x|=x+1$

$x=x+1$ lub $x=-(x+1)$

$0=1$ lub $2x=-1$

$x=-\frac{1}{2}$

Równanie 3.

$|x|=2x-1$

$x=2x-1$ lub $x=-(2x-1)$

$-x=-1$ lub $3x=1$

$x=1$ lub $x=\frac{1}{3}$

Zadanie 3. Czy poniższe równania rozwiązano poprawnie? Jeśli nie, to zapisz właściwe rozwiązania.

Równanie 1.

$|x-1| = |x+1|$

$x-1 = x+1$

$-1 = 1$

Równanie nie ma rozwiązań.

Równanie 2.

$|x-1| = |1-x|$

$x-1 = 1-x$

$2x = 2$

$x = 1$

Jedynym rozwiązaniem równania jest $x = 1$.

Równanie 3.

$|x+1| = x+1$

$x+1 = x+1$

$0 = 0$

Rozwiązaniem równania jest dowolna liczba rzeczywista.

Zadanie 4. Trzech uczniów wyjaśniało, jak rozwiązali układ równań:

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$$

Czy któryś z nich rozwiązał układ poprawnie? Wyjaśnij, na czym polegają błędy, które popełnili.

Filip: Dodałem stronami te równania i otrzymałem: $5x+5y=5$, a po podzieleniu obu stron przez 5: $x+y=1$. Oznacza to, że układ ma nieskończenie wiele rozwiązań i jest nim każda para liczb, która spełnia warunek $x+y=1$.

Grzegorz: Pomnożyłem stronami te równania i otrzymałem: $6x^2+6y^2=0$, a po podzieleniu obu stron przez 6: $x^2+y^2=0$. Jedyną parą liczb, która spełnia równanie $x^2+y^2=0$, jest para liczb $x=0$, $y=0$. Oznacza to, że układ ma jedno rozwiązanie i jest nim para liczb $x=0$, $y=0$.

Henryk: Odjąłem stronami te równania i otrzymałem: $-x+y=5$. Oznacza to, że układ ma nieskończenie wiele rozwiązań i jest nim każda para liczb, która spełnia warunek $-x+y=5$.

Testy online. Równania, nierówności, układy równań (zakres podstawowy)

Zadanie 1

Rozwiązanie równania $(4x-3)(3+4x)=4x(4x-1{,}5)$ należy do przedziału:

- [ ] $\left(1\frac{1}{2};4\right)$
- [ ] $\left(-2;1\frac{1}{2}\right)$
- [ ] $<-1;1>$
- [ ] $<0;2\frac{1}{2})$

Zadanie 2

Które z poniższych równań jest sprzeczne?

- [ ] $\frac{x}{x-2}=\frac{x+2}{x-3}$
- [ ] $(x+1)^2=x(x+2)$
- [ ] $|x-3|=2$
- [ ] $\frac{x}{x+1}=\frac{3x}{3x+1}$

Zadanie 3

Półlitrowy słoik mieści 0,7 kg miodu. Do 0,2 litrowego słoiczka można zmieścić:

- [ ] 0,28 kg tego miodu
- [ ] 0,3 kg tego miodu
- [ ] 0,4 kg tego miodu
- [ ] 0,35 kg tego miodu

Zadanie 4

Ile liczb naturalnych spełnia nierówność $(2x-1)^2-3x(x-3)<(x+2)^2$?

- [ ] trzy liczby
- [ ] nieskończenie wiele liczb
- [ ] dwie liczby
- [ ] cztery liczby

Zadanie 5

Iloczyn liczb spełniających równanie $|2x-5|=3$ to:

- [ ] 1
- [ ] -4
- [ ] 4
- [ ] 5

Zadanie 6

Która z nierówności ma wśród rozwiązań najwięcej liczb całkowitych?

- [ ] $|3x+2|\leq 3$
- [ ] $\left|4+\frac{1}{3}x\right|<3$
- [ ] $|2x-4|<6$
- [ ] $|x-4|\leq 5$

Testy online. Równania, nierówności, układy równań (zakres podstawowy)

Zadanie 7

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 5a-4b=7 \\ 3a+7(a-b)=2 \end{cases}$ jest para liczb, których suma wynosi:

- [ ] $-4{,}2$
- [ ] $-20{,}2$
- [ ] -1
- [ ] 23

Zadanie 8

Aby układ równań $\begin{cases} 5y-5x=k \\ x-y=3 \end{cases}$ był nieoznaczony, literę k należy zastąpić liczbą:

- [ ] Nie ma takiej liczby.
- [ ] -15
- [ ] 5
- [ ] 15

Zadanie 9

Wymiary dna prostopadłościennego basenu to 4m x 8m. Z kranu leci woda z szybkością 40 litrów na minutę. Jak długo kran musi być odkręcony, aby poziom wody w basenie wyniósł 1,5m?

- [ ] 0,5 godziny
- [ ] 1,2 godziny
- [ ] 20 godzin
- [ ] 12 godzin

Zadanie 10

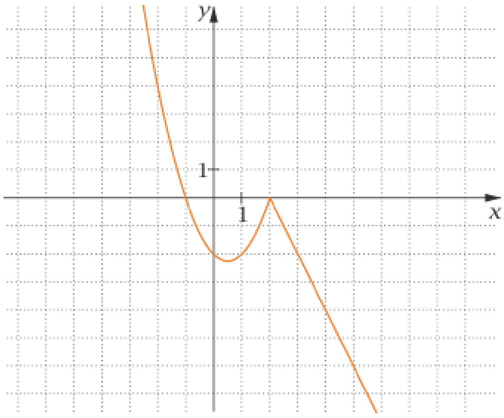
Piotr i Paweł oszczędzają na wycieczkę. Kwota zaoszczędzona przez Piotra jest o 25% mniejsza niż oszczędności Pawła. Paweł ma o 40 zł więcej niż Piotr. Jaką kwotę zaoszczędzili łącznie?

- [ ] 300 zł
- [ ] 280 zł
- [ ] 240 zł
- [ ] 200 zł

Testy online. Funkcje (zakres rozszerzony)

Zadanie 1

Funkcja f, której wykres przedstawiono na rysunku, opisana jest wzorem:



- [ ] $f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & \text{dla } x\in(-\infty;2> \\ -2x+4 & \text{dla } x\in(2;+\infty) \end{cases}$
- [ ] $f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & \text{dla } x\in(-\infty;2> \\ 2x-4 & \text{dla } x\in(2;+\infty) \end{cases}$
- [ ] $f(x)=\begin{cases} -x^2-x+2 & \text{dla } x\in(-\infty;2> \\ -2x+4 & \text{dla } x\in(2;+\infty) \end{cases}$
- [ ] $f(x)=\begin{cases} -x^2-x+2 & \text{dla } x\in(-\infty;2> \\ 2x-4 & \text{dla } x\in(2;+\infty) \end{cases}$

Zadanie 2

Rozwiązaniem nierówności $(x^2-4)(-x^2+x+20)\geq 0$ jest zbiór:

- [ ] $(-\infty;-4)\cup<5;+\infty)$
- [ ] $<-4;-2>\cup<2;5>$
- [ ] $(-\infty;-4)\cup<2;+\infty)$
- [ ] $(-\infty;-2)\cup<5;+\infty)$

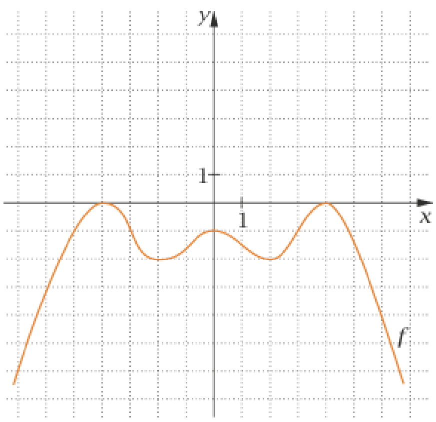
Zadanie 3

Dziedziną funkcji $y=\sqrt{x^2+2x-15}+\frac{5}{x-3}$ jest zbiór:

- [ ] $(-\infty;-5>\cup<3;+\infty)$
- [ ] $(-\infty;-5>\cup(3;+\infty)$
- [ ] $<-5;3)$
- [ ] $<-5;3>$

Zadanie 4

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji wielomianowej $y=W(x)$, która ma dwa miejsca zerowe. Wskaż zdanie fałszywe.



- [ ] Wszystkie pierwiastki wielomianu $y=W(x)$ są parzystokrotne.
- [ ] Współczynnik przy najwyższej potędze zmiennej w wielomianie $y=W(x)$ jest liczba ujemną.
- [ ] Jeden z pierwiastków wielomianu $y=W(x)$ jest trzykrotny.
- [ ] Wielomian $y=W(x)$ jest co najmniej czwartego stopnia.

Testy online. Funkcje (zakres rozszerzony)

Zadanie 5

Wielomian W(x) ma tylko dwa pierwiastki: liczba -2 jest jego trzykrotnym pierwiastkiem, a liczba 3 – dwukrotnym. Współczynnik a przy najwyższej potędze zmiennej x tego wielomianu jest dodatni. Zbiorem rozwiązań nierówności $W(x)<0$ jest:

- ☐ $(-\infty;-2)$
- ☐ $(-2;3)$
- ☐ $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$
- ☐ $(3;+\infty)$

Zadanie 6

Dane są dwie funkcje $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x-1$ oraz $g(x)=\log_2(x+2)$. Wskaż zdanie prawdziwe.

- ☐ Wykres funkcji f ma dwie asymptoty o równaniach $y=-1$ i $x=0$, a wykres funkcji g ma jedną asymptotę o równaniu $x=-2$.
- ☐ Wykres funkcji f ma asymptotę o równaniu $x=1$, a wykres funkcji g – asymptotę o równaniu $y=2$.
- ☐ Wykres funkcji f ma asymptotę o równaniu $y=-1$, a wykres funkcji g – asymptotę o równaniu $x=-2$.
- ☐ Wykresy funkcji f i g nie mają asymptot.

Zadanie 7

Wykresy funkcji $y=3^{x-1}$ i $y=\sqrt{3}\left(\frac{1}{9}\right)^x$ przecinają się w punkcie o współrzędnych:

- ☐ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- ☐ $\left(-\frac{1}{2}, 3\sqrt{3}\right)$
- ☐ $\left(1\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$
- ☐ $\left(\frac{1}{2}, 3\sqrt{3}\right)$

Zadanie 8

Wskaż równanie, którego rozwiązanie jest liczbą dodatnią.

- ☐ $\frac{2^x}{5}=3^x$
- ☐ $\left(\frac{25}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2}=\frac{27}{125}$
- ☐ $\log_{0,2}(x-2)=3$
- ☐ $\log_3\left(2+\frac{x}{2}\right)=-2$

Zadanie 9

Rozwiązanie równania $\log_4 x+\log_{0,5}3=\log_2 5$ należy do przedziału:

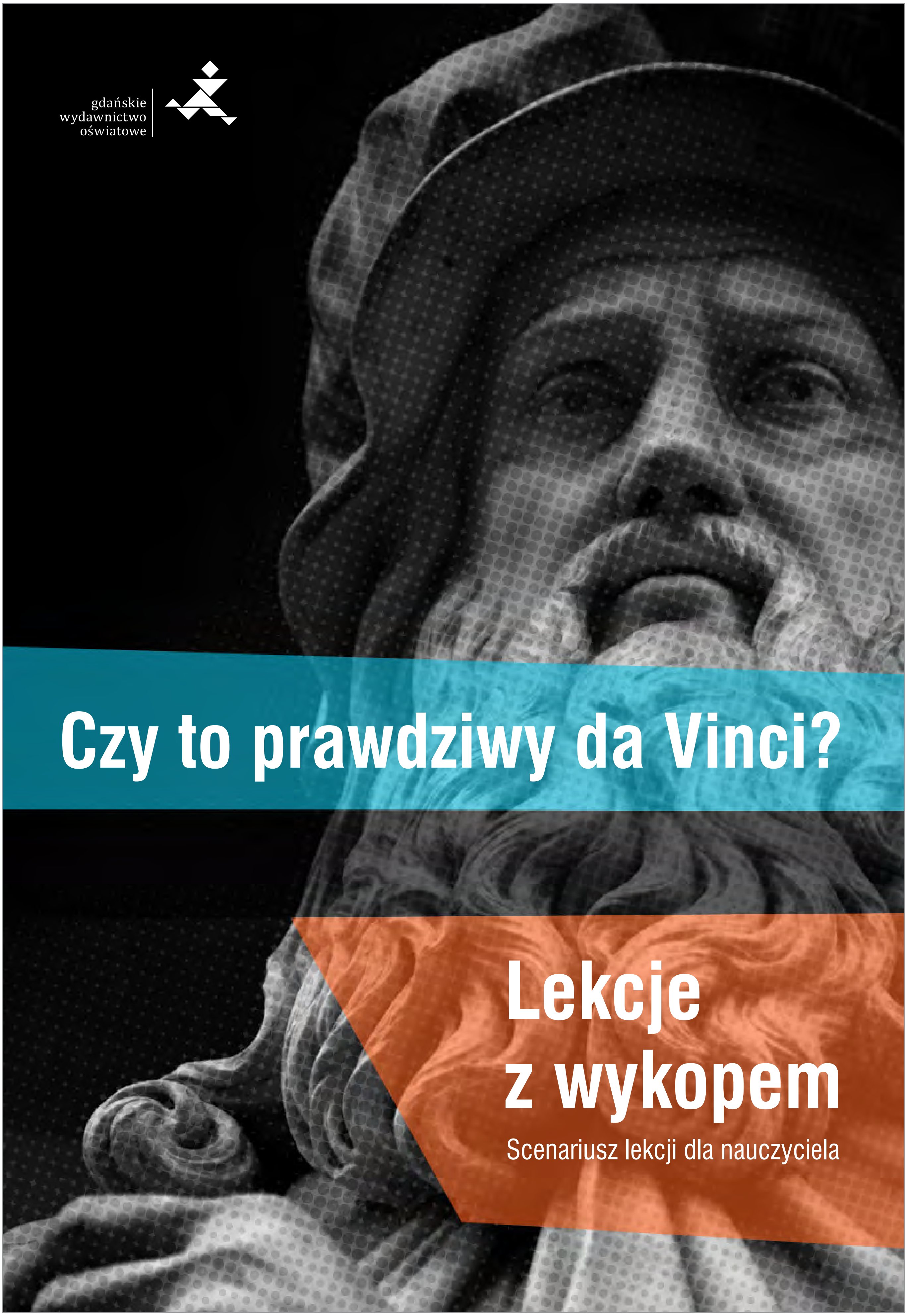
- ☐ $<200;230>$
- ☐ $<3;100>$
- ☐ $<0;\frac{1}{2}>$
- ☐ $<1;2>$

Zadanie 10

Kolonia bakterii początkowo liczyła 2000 bakterii, a co trzy godziny ich liczba rosła o 50%. Po upływie doby ich liczba:

- ☐ nie można oszacować tej wielkości
- ☐ będzie mniejsza niż 50000
- ☐ będzie większa niż 50000
- ☐ będzie równa 50000

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



Czy to prawdziwy da Vinci?

Lekcje z wykopem

Scenariusz lekcji dla nauczyciela

Czy to prawdziwy da Vinci?

Opis: Na tej lekcji odkryjemy, w jaki sposób matematyka może być wykorzystywana do badania wieku obiektów. Za pomocą funkcji wykładniczej i logarytmicznej można rozwiązywać zadania dotyczące pojęcia rozpadu promieniotwórczego pierwiastków. Problemy te pozwalają w praktyce wykorzystać nabyte przez uczniów umiejętności przekształcania wyrażeń, szkicowania wykresów, rozwiązywania równań i nierówności wykładniczych i logarytmicznych.

Uwagi: Zajęcia przeprowadzamy, gdy uczniowie znają definicję potęgi o wykładniku wymiernym oraz logarytmu, potrafią wykonywać działania na potęgach o wykładnikach wymiernych i na logarytmach, umieją rozwiązywać nierówności wykładnicze, znają pojęcie funkcji wykładniczej. Rozwiązując zadania, korzystamy z kalkulatorów.

Przebieg lekcji:

1. Nauczyciel: Czy to prawdziwy da Vinci? Do naszych czasów przetrwało zaledwie 15 prac, które z całą pewnością wyszły spod pędzla włoskiego geniusza. Istnieją poza tym co najmniej trzy inne dzieła, o których autorstwo podejrzewa się renesansowego malarza. *Zbawiciel świata* (kontrowersje związane z ustaleniem pochodzenia nie przeszkodziły w sprzedaży obrazu za 450 milionów dolarów!), *Portret Izabeli d'Este*, o którym myślano, że w ogóle nie powstał (w Luwrze przechowywany jest jego szkic), oraz *Cud Świętego Donata z Arezzo*, który mógł mieć, poza da Vinci, aż dwóch ojców – Andreę del Verrocchio lub Lorenza di Credi.

Leonardo da Vinci *Zbawiciel Świata* Archiwum GWO

Leonardo da Vinci *Portret Izabeli d'Este* Archiwum GWO

Leonardo da Vinci *Cud Świętego Donata z Arezzo* Archiwum GWO

1

Więcej informacji o skomplikowanych losach wymienionych dzieł uczniowie znajdą na podanych stronach.

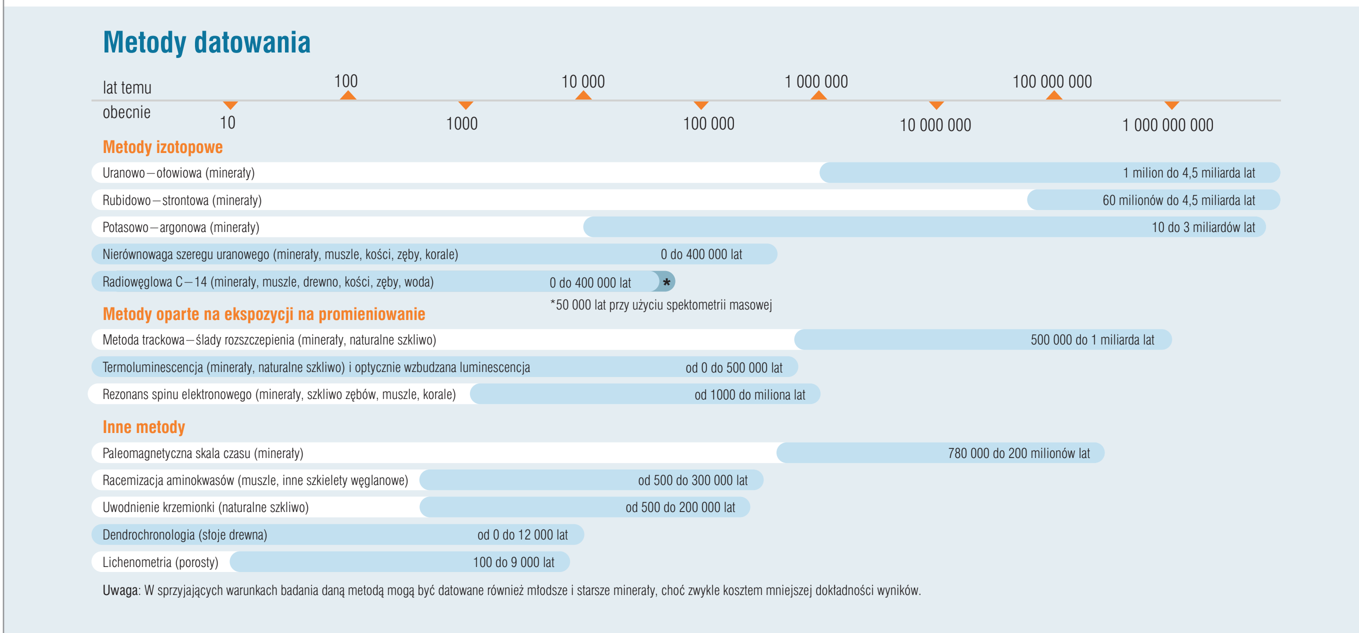
Zbawiciel Świata
https://onebid.pl/aktualnosci/Historia-jednego-obrazu-Salvator-Mundi-Leonadro-da-Vinci

Portret Izabeli d'Este
https://www.tvp.info/18833036/nieznany-obraz-leonarda-odnaleziony-po-wiekach-w-bankowym-sejfie-w-szwajcarii

Cud Świętego Donata z Arezzo
https://kultura.onet.pl/wiadomosci/malowidlo-z-worcester-art-museum-to-jednak-dzielo-leonarda-da-vinci/8l7jh47

W jaki sposób można odkryć, kto namalował obraz, jeśli nie jest on podpisany (ba, podpis też nie daje żadnej gwarancji)?

Możemy poprosić uczniów, aby dowiedzieli się, w jaki sposób datuje się różne stare obiekty. Uczniowie mogą mieć na ten temat wiedzę i warto ją wykorzystać.



Carl Zimmer, *Ile lat ma*…, „National Geographic POLSKA", 9/2001, ss. 92–93.

Nauczyciel: Jak to jest możliwe, że naukowcy potrafią określić wiek zwierząt, które umarły tak dawno temu, albo ustalić wiek budowli zbudowanych w tak odległych czasach?

W materii żywej występuje w niewielkiej ilości radioaktywny izotop węgla-14 (^{14}C). Tworzy się on w sposób ciągły w wyższych partiach atmosfery w wyniku zderzania neutronów (powstałych podczas bombardowania atomów przez promienie kosmiczne) z atomami azotu. Jednocześnie obecny w przyrodzie ^{14}C rozpada się do azotu, emitując przy tym elektrony. Rezultatem tych procesów jest stałe i określone stężenie węgla ^{14}C oraz dwutlenku węgla $^{14}CO_2$ w atmosferze. Wszystko, co żyje na Ziemi, zawiera określony stosunek węgla „zwykłego" ^{12}C i radioaktywnego ^{14}C.

Badania próbek pobranych ze świeżo ściętych drzew w różnych miejscach kuli ziemskiej wykazują taki sam procent zawartości ^{14}C. W momencie, gdy żywy organizm umiera, zaprzestaje pobierania radioaktywnego węgla z atmosfery i jego poziom spada z biegiem czasu. Wiadomo, że rozkład radioaktywnego węgla następuje wykładniczo względem czasu, a okres połowicznego rozpadu tego izotopu wynosi 5700 lat. Naukowcy określają wiek znaleziska przez porównanie stężenia ^{14}C w znalezisku archeologicznym ze stężeniem ^{14}C w żywych organizmach.

Ta technika, wykorzystywana przez archeologów do ustalania wieku budowli zawierających elementy materiałów pochodzenia organicznego, przez paleontologów zaś do ustalania wieku prehistorycznych zwierząt, nazywa się datowaniem za pomocą węgla-14. Pozwala ona sięgać wstecz mniej więcej 40 000 lat.

2. Nauczyciel: Aby odpowiedzieć na pytanie zadane w temacie lekcji, zacznijmy od prostych zadań.

3. Zadanie: W ulu jest 100 pszczół. Wiadomo, że ich populacja podwaja się w ciągu jednego miesiąca. Które z wyrażeń: $100 \cdot 5^2$, $100 \cdot 2^5$, $(100 \cdot 2)^5$, $(100 \cdot 5)^2$ przedstawia liczbę pszczół po 5 miesiącach?

Rozumujemy tak: po miesiącu pszczół jest 200, po 2 miesiącach – 400, ..., po 5 miesiącach – 3200 = $100 \cdot 2^5$. Uogólniamy z uczniami badaną zależność. Niech N oznacza liczbę pszczół po t miesiącach, wtedy mamy:

$N(t) = 100 \cdot 2^t$.

4. Zadanie: Populacja pewnej kolonii ptaków liczącej obecnie 250 sztuk potraja się co 10 lat. Które z wyrażeń:

$250 \cdot 3^{10n}$, $250 \cdot n^{30}$, $250 \cdot 3^{\frac{n}{10}}$, $250 \cdot 3^{\frac{10}{n}}$ przedstawia liczbę ptaków po n latach?

Rozwiązując zadanie, uczniowie mogą spróbować „dopasować" wzór. Po 10 latach będzie 750 = $250 \cdot 3^1$ ptaków, po 20 latach – 2250 = $250 \cdot 3^2$. Zatem szukane wyrażenie ma postać $250 \cdot 3^{\frac{10}{n}}$.

5. Nauczyciel: Interesującym przykładem zastosowania zależności wykładniczej jest rozpad promieniotwórczy. Tempo takiego rozpadu opisane jest przez czas (okres) połowicznego rozpadu (zaniku), który mówi, po jakim okresie zostaje połowa radioaktywnej substancji. Załóżmy, że czas połowicznego rozpadu pewnej substancji wynosi 20 dni, a mamy do dyspozycji 5 gramów tej substancji. W takim razie po 20 dniach mamy $5 \cdot \frac{1}{2}$, po 40 dniach zostało $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ i ogólnie po t dniach będzie $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$ gram substancji. Zadajmy sobie teraz pytanie, po jakim czasie będzie mniej niż 1 gram tej substancji? Jeśli ilość substancji oznaczymy przez K to możemy zapisać zależność: $K(t) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$

6. Zadanie: Resztki szkieletu mamuta znalezionego w tundrze mają zawartość węgla-14 równą 13% tego, który mają obecnie żyjące organizmy. Oszacuj, kiedy żył ten mamut.

Niech K oznacza stężenie ^{14}C w organizmie w zależności od czasu, a K_0 stężenie ^{14}C w atmosferze, czyli także w momencie śmierci mamuta. Efekt zmiany stężenia węgla-14 w czasie możemy zapisać następująco:

$$K(t) = K_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

Z treści zadania wiemy, że $\frac{K(t)}{K_0} = \frac{13}{100}$, stąd $0{,}13 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$, czyli $t = 5700 \cdot \frac{\log 0{,}13}{\log 0{,}5} \approx 16777$ [lat].

Zatem zwierzę żyło około 17 tysięcy lat temu.

7. Nauczyciel: W roku 2018 na rynku sztuki pojawił się nowy obraz. Sensacja! Wykorzystano metodę datowania węglem ^{14}C, pobrano próbki farby i okazało się, że zawierają 96% początkowej zawartości izotopu. Czy jest możliwe, aby został namalowany przez wspaniałego Leonardo da Vinci?

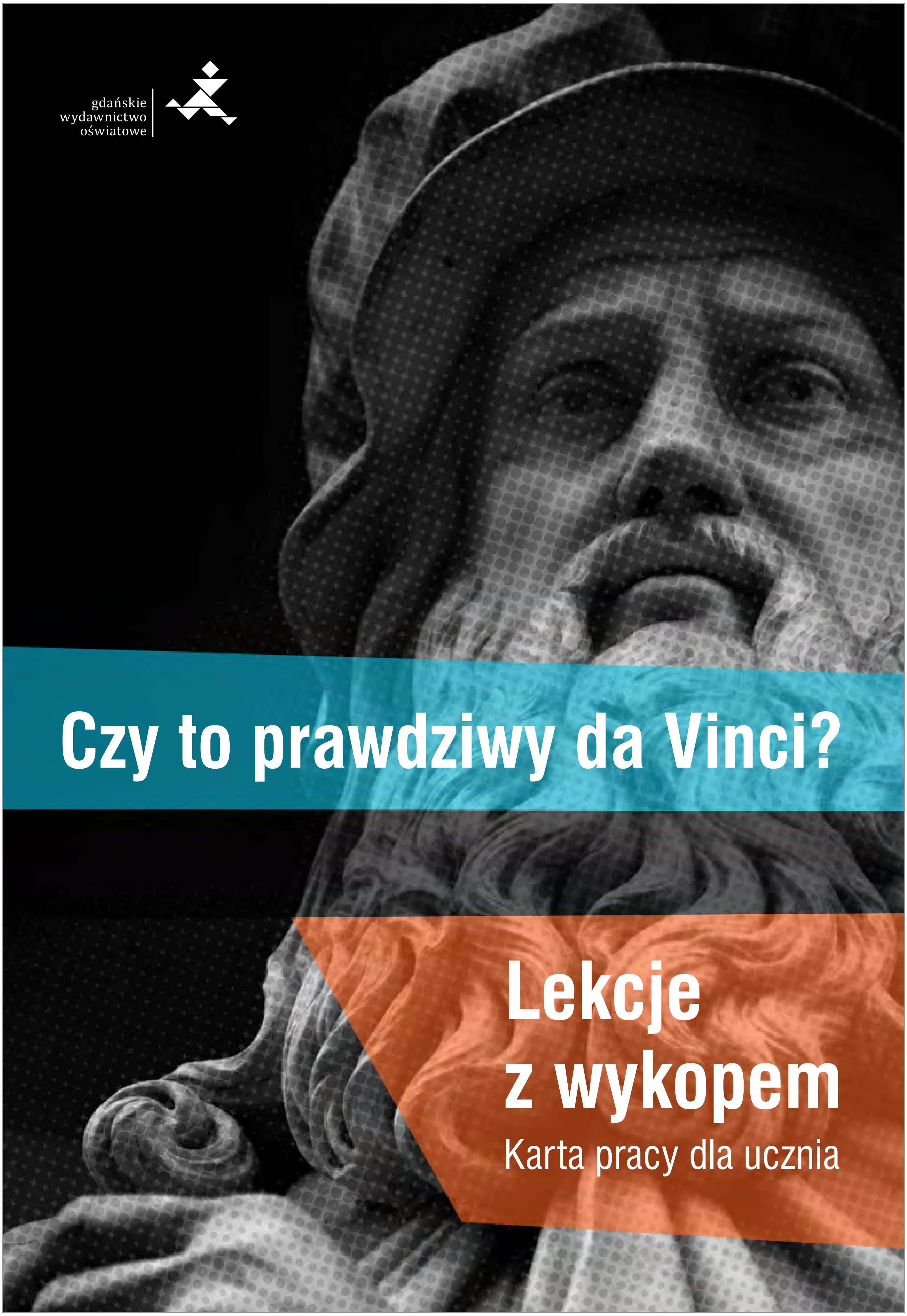
$$0{,}96 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$t = 5700 \cdot \frac{\log 0{,}96}{\log 0{,}5} \approx 336\,[\text{lat}]$$

Obraz został namalowany około 336 lat temu. Leonardo da Vinci żył w latach 1452–1519. Niestety nie jest to obraz tego malarza!

Podsumowanie

Nauczyciel: Na tej lekcji mieliśmy okazję zobaczyć bardzo praktyczne zastosowanie wiedzy matematycznej w sytuacji rzeczywistej. Znajomość funkcji wykładniczych pozwala badać autentyczność obrazów. I nie tylko. Narzędzia te stosuje się do bardzo ważnych dla ludzi badań historycznych.



gdańskie wydawnictwo oświatowe

Czy to prawdziwy da Vinci?

Lekcje z wykopem

Karta pracy dla ucznia

Czy to prawdziwy da Vinci?

Krok 1: Czy to prawdziwy da Vinci? Do naszych czasów przetrwało zaledwie 15 prac, które z całą pewnością wyszły spod pędzla włoskiego geniusza. Istnieją poza tym co najmniej trzy inne dzieła, o których autorstwo podejrzewa się renesansowego malarza. *Zbawiciel świata* (kontrowersje związane z ustaleniem pochodzenia nie przeszkodziły w sprzedaży obrazu za 450 milionów dolarów!), *Portret Izabeli d'Este*, o którym myślano, że w ogóle nie powstał (w Luwrze przechowywany jest jego szkic), oraz *Cud Świętego Donata z Arezzo*, który mógł mieć, poza da Vinci, aż dwóch ojców – Andreę del Verrocchio lub Lorenza di Credi.

Leonardo da Vinci *Zbawiciel Świata* Archiwum GWO

Leonardo da Vinci *Portret Izabeli d'Este* Archiwum GWO

Leonardo da Vinci *Cud Świętego Donata z Arezzo* Archiwum GWO

Więcej informacji o skomplikowanych losach wymienionych dzieł znajdziesz na podanych stronach.

Zbawiciel Świata

https://onebid.pl/aktualnosci/Historia-jednego-obrazu-Salvator-Mundi-Leonadro-da-Vinci

Portret Izabeli d'Este

https://www.tvp.info/18833036/nieznany-obraz-leonarda-odnaleziony-po-wiekach-w-bankowym-sejfie-w-szwajcarii

Cud Świętego Donata z Arezzo

https://kultura.onet.pl/wiadomosci/malowidlo-z-worcester-art-museum-to-jednak-dzielo-leonarda-da-vinci/8l7jh47

1

Krok 2: Jak to jest możliwe, że naukowcy potrafią określić wiek zwierząt, które umarły tak dawno temu, albo ustalić wiek budowli zbudowanych w tak odległych czasach?

W materii żywej występuje w niewielkiej ilości radioaktywny izotop węgla-14 (^{14}C). Tworzy się on w sposób ciągły w wyższych partiach atmosfery w wyniku zderzania neutronów (powstałych podczas bombardowania atomów przez promienie kosmiczne) z atomami azotu. Jednocześnie obecny w przyrodzie ^{14}C rozpada się do azotu, emitując przy tym elektrony. Rezultatem tych procesów jest stałe i określone stężenie węgla ^{14}C oraz dwutlenku węgla $^{14}CO_2$ w atmosferze. Wszystko, co żyje na Ziemi, zawiera określony stosunek węgla „zwykłego" ^{12}C i radioaktywnego ^{14}C.

Badania próbek pobranych ze świeżo ściętych drzew w różnych miejscach kuli ziemskiej wykazują taki sam procent zawartości ^{14}C. W momencie, gdy żywy organizm umiera, zaprzestaje pobierania radioaktywnego węgla z atmosfery i jego poziom spada z biegiem czasu. Wiadomo, że rozkład radioaktywnego węgla następuje wykładniczo względem czasu, a okres połowicznego rozpadu tego izotopu wynosi 5700 lat. Naukowcy określają wiek znaleziska przez porównanie stężenia ^{14}C w znalezisku archeologicznym ze stężeniem ^{14}C w żywych organizmach.

Ta technika, wykorzystywana przez archeologów do ustalania wieku budowli zawierających elementy materiałów pochodzenia organicznego, przez paleontologów zaś do ustalania wieku prehistorycznych zwierząt, nazywa się datowaniem za pomocą węgla-14. Pozwala ona sięgać wstecz mniej więcej 40 000 lat.

Krok 3: W ulu jest 100 pszczół. Wiadomo, że ich populacja podwaja się w ciągu jednego miesiąca.

Które z wyrażeń: $100\cdot 5^2$, $100\cdot 2^5$, $(100\cdot 2)^5$, $(100\cdot 5)^2$ przedstawia liczbę pszczół po 5 miesiącach?

Krok 4: Populacja pewnej kolonii ptaków liczącej obecnie 250 sztuk potraja się co 10 lat. Które z wyrażeń:

$250\cdot 3^{10n}$, $250\cdot n^{30}$, $250\cdot 3^{\frac{n}{10}}$, $250\cdot 3^{\frac{10}{n}}$ przedstawia liczbę ptaków po *n* latach?

Krok 5: Resztki szkieletu mamuta znalezionego w tundrze mają zawartość węgla-14 równą 13% tego, który mają obecnie żyjące organizmy. Oszacuj, kiedy żył ten mamut.

Krok 6: W roku 2018 na rynku sztuki pojawił się nowy obraz. Sensacja! Wykorzystano metodę datowania węglem ^{14}C, pobrano próbki farby i okazało się, że zawierają 96% początkowej zawartości izotopu. Czy jest możliwe, aby został namalowany przez wspaniałego Leonardo da Vinci?

Podsumowanie

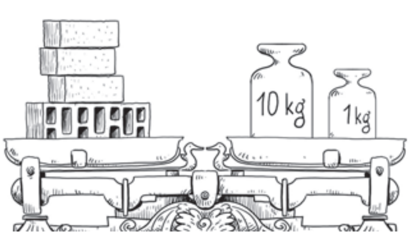
Na tej lekcji miałeś okazję zobaczyć bardzo praktyczne zastosowanie wiedzy matematycznej w sytuacji rzeczywistej. Znajomość funkcji wykładniczych pozwala badać autentyczność obrazów. I nie tylko. Narzędzia te stosuje się do bardzo ważnych dla ludzi badań historycznych.

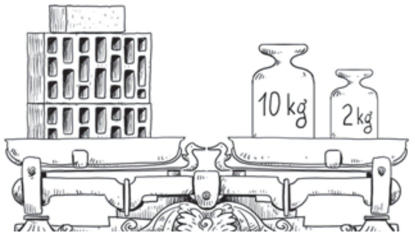
2

SYSTEMS OF EQUATIONS

Look at the drawings. Let's try to answer the question:

How much does one brick weigh, and how much — one hollow brick?





Assume the following designations:

x — mass of the brick (in kg)
y — mass of the hollow brick (in kg)

The information given in the drawings can be expressed by two equations:

$$3x + y = 11 \qquad\qquad x + 2y = 12$$

To determine the mass of brick and hollow brick, we need to find a pair of numbers x and y that meets both equations simultaneously. This problem can be written in the form of so-called **system of equations**.

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

We write the equations one below the other and bind them with a brace.

Let us first consider the first equation of this system of equations. It is easy to check that $3x + y = 11$ will be satisfied by the pair $x = 3$, $y = 2$, and also $x = 2{,}5$, $y = 3{,}5$. You can find many pairs of numbers that satisfy this equation.

EXERCISE a) Replace the symbols with appropriate numbers so that the obtained pairs of numbers satisfy the equation $3x + y = 11$.

$x = 1$ and $y = ♥$ $\qquad$ $x = ♠$ and $y = 5$ $\qquad$ $x = \frac{1}{3}$ and $y = ♣$

b) Give examples of pairs of numbers that satisfy the equation $x + 2y = 12$.

c) Which of the pairs of numbers obtained in sub-point a) also satisfies the equation $x + 2y = 12$?

Solving the above exercise, it can be seen that the pair of numbers $x = 2$ and $y = 5$ satisfies both the first and the second equation. So, we have an answer to our question: the brick weighs 2 kg, and the hollow brick 5 kg.

Systems of equations serve to express and solve problems, in which there are more than one unknown.

Examples of systems of equations:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3v = 4s \\ s = 2v + 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3 \\ y - z = 4 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

If the system consists of two equations with two unknowns, then a pair of numbers that satisfies both of these equations at the same time is called a **solution of the system of equations**.

From the history

Solving systems of equations has been dealt with already over 3000 years ago! The oldest examples of equation systems come from clay tablets discovered during archaeological excavations in the area of ancient Babylonia. These systems are written in a cuneiform script, which in no way resembles contemporary mathematical symbolism.

However, the methods of solving them invented by ancient accountants are not much different from the methods used today.

One of the methods for solving systems of equations is the **substitution method**, which is illustrated in the example below.

EXAMPLE 1 Solve the system of equations.

$$\begin{cases} x + 4y = 0 \\ 2x + 3y = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4y \\ 2(-4y) + 3y = 25 \end{cases}$$

We solve the first equation for x. Using the equality $x = -4y$ in the second equation, instead of x we substitute $-4y$.

$$\begin{cases} x = -4y \\ -5y = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4y \\ y = -5 \end{cases}$$

We rewrite the first equation, and the second equation (with one unknown y) we solve.

$$\begin{cases} x = -4 \times (-5) \\ y = -5 \end{cases}$$

Because $y = -5$, so, we can calculate x (from the first equation).

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = -5 \end{cases}$$

Solution of the system of equations is the pair of numbers $x = 20$ and $y = -5$.

PROBLEM Solve the system of equations: $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2y - 5x = 4 \end{cases}$

When solving a system of equations using the substitution method, you can allow yourself to simplify the recording. When we get the equation with one unknown, we can solve it separately, without rewriting the two equations every time.

EXAMPLE 2 Solve the system of equations.

$$\begin{cases} 2(x+1) = 3y \\ y + 2x = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2 = 3y \\ y = 10 - 2x \end{cases}$$

The first equation is transformed, the second equation is solved for y.

$$2x + 2 = 3(10 - 2x)$$
$$2x + 2 = 30 - 6x$$
$$8x = 28$$
$$x = 3{,}5$$

In the first equation, we substitute $10 - 2x$ in place of y and solve the equation obtained.

$$y = 10 - 2 \times 3{,}5$$

To calculate the value of y, we insert 3,5 instead of x into the equation $y = 10 - 2x$.

$$\begin{cases} x = 3{,}5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Solution of the system of equations is the pair of numbers $x = 3{,}5$ and $y = 3$.

PROBLEM Solve the system of equations by the substitution method.

a) $\begin{cases} x = 2y \\ x + 4y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y - 3x = 2 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$

The next examples present a different way of solving systems of equations — the **method of opposite coefficients**.

EXAMPLE 3 Solve the system of equations.

$$+\begin{cases} 2x + 6y = 15 \\ 3x - 6y = 25 \end{cases}$$

Coefficients at unknown y are opposite numbers; we add the left and right sides of both equations, thus getting rid of one unknown, because $6y + (-6y) = 0$.

$$5x = 40$$
$$x = 8$$

$$2 \times 8 + 6y = 15$$
$$y = -\frac{1}{6}$$

The obtained value of x (number 8) is put in place of x to one (arbitrary) equation of the system and we calculate the value of the unknown y.

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Solution to the system of equations is the pair of numbers $x = 8$ and $y = -\frac{1}{6}$.

PROBLEM Solve the system of equations by the method of opposite coefficients.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 7x + 2y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -4x - 2y = 13 \\ 4x + 11y = 14 \end{cases}$

The case when the coefficients at the same unknown are opposite numbers is rare. However, you can easily lead to such a situation.

EXAMPLE 4 Solve the system of equations.

$$\begin{cases} 13x + 3y = 1 \\ 2x + y = 5 \quad | \times (-3) \end{cases}$$

We multiply both sides of the second equation by -3; in this way we will obtain a system in which coefficients at unknown y will be opposite numbers.

$$+\begin{cases} 13x + 3y = 1 \\ -6x - 3y = -15 \end{cases}$$

We add the equations by sides.

$$7x = -14$$
$$x = -2$$

We calculate the value of x.

$$2 \times (-2) + y = 5$$
$$y = 9$$

We put -2 for x in one (arbitrary) equation.

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 9 \end{cases}$$

Solution to the system of equations is the pair of numbers $x = -2$ and $y = 9$.

PROBLEM Solve the system of equations by the method of opposite coefficients.

a) $\begin{cases} 5x - y = 10 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ x - 2y = 10 \end{cases}$

Sometimes, to use the method of opposite coefficients, you must multiply both equations of the system by the appropriate number.

EXAMPLE 5 Solve the system of equations.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3 \quad | \times (-3) \\ 3x + 5y = 2 \quad | \times 2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -6x - 12y = -9 \\ 6x + 10y = 4 \end{cases}$$

We multiply both equations by such numbers to get opposite coefficients at unknown x.

$$-2y = -5 \quad | \div (-2)$$
$$y = 2{,}5$$

$$2x + 4 \times 2{,}5 = 3$$
$$2x = -7$$
$$x = -3{,}5$$

$$\begin{cases} x = -3{,}5 \\ y = 2{,}5 \end{cases}$$

Solution to the system of equations is the pair of numbers $x = -3{,}5$ and $y = 2{,}5$.

PROBLEM Solve the system of equations by the method of opposite coefficients.

a) $\begin{cases} 5x + 4y = 13 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -\frac{3}{4}x + 5y = 20 \\ \frac{3}{5}x - 3y = -6 \end{cases}$

PROBLEMS

1. Check mentally which of the following pairs of numbers satisfy the equation $3y - x = 10$, and which meet the equation $2x - 3y + 11 = 0$. Indicate the pair that satisfies the system of equations.

$$\begin{cases} 3y - x = 10 \\ 2x - 3y + 11 = 0 \end{cases}$$

$A:\ x = 2$ and $y = 4$
$B:\ x = 0{,}5$ and $y = 4$
$C:\ x = -1$ and $y = 3$
$D:\ x = 5$ and $y = 5$

2. Write any system of equations, whose solution is the pair of numbers $x = 1$ and $y = 2$.

3. Solve mentally the system of equations.

a) $\begin{cases} 4x = 20 \\ y = x + 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5y = 2 \\ x + y = 2\frac{2}{5} \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x + 10 = 50 \\ y = 2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3y = 12 \\ x - y = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4y - x = 6 \\ 17y = 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x = 9 - y \\ y - 3 = 0 \end{cases}$

4. Solve the system of equations with the substitution method.

a) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 4x + y = 13 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5y - x = 3 \\ x = 3 - y \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3r = s \\ 3r + s = 24 \end{cases}$

5. Write down the given information in the form of a system of equations and solve it.

a) French fries cost x PLN, and the juice costs y PLN. Andrzej bought 2 servings of fries and juice, and paid 7 PLN. Kamila bought one portion of French fries and 2 juices, and paid PLN 6,50.

b) In a certain class there are x girls and y boys, together 27 students. If there were twice as many boys and twice less girls, then the class would have 24 students.

c) Jaś has x PLN, Staś y PLN. Together they have PLN 35 but Staś has 8 PLN more than Jaś.

d) A hat costs x PLN and a scarf y PLN. For the set you have to pay 90 PLN. If the hat was 10% cheaper and the scarf 10% more expensive the set would cost 85 PLN.

6. Solve the system of equations with the method of opposite coefficients.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ -x - 3y = 16 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 2x - 1{,}1y = 0{,}7 \\ 0{,}5x + 1{,}1y = 4{,}3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -x + y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$

7. Łut and skrupuł are old mass units. Mr. Albert claims that 2 łuts and 5 skrupułs are 30,624 g. Mr. Dionysos claims that 4 łuts and 10 skrupułs are 61,248 g. Mr. Zenobiusz claims that 8 łuts and 20 skrupułs is 120,496 g. It is known that two of these gentlemen are telling the truth and one is lying. Which one is lying?

8. Solve the system of equations with the method of opposite coefficients.

a) $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 3x-5y=11 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x-3y=10 \\ 5x+5y=0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 4x+5y=12{,}3 \\ 3x-2y=-4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5p-2r=21 \\ 3p+5r=-6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 5v_1+4v_2=4 \\ 7v_1+5v_2=6 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x-0{,}2y=35 \\ 2{,}5x-5y=5 \end{cases}$

9. Write and solve the appropriate system of equations.

a) Number x is by 5 less than number y. Number by 1 greater than y is 3 times greater than x.

b) Number a is 3 times greater than b. The arithmetic mean of numbers a and b is equal to 14,5.

c) Number x is 8 less than number y. Number y is 3 times greater than number x.

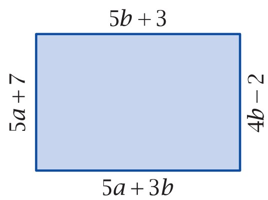
d) Number u is by 6 greater than number v. The sum of the numbers u and v is 4 times greater than v.

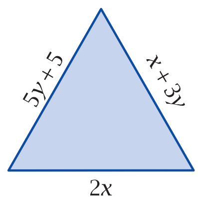
e) Number u is 5 greater than v, and a third part of u is equal to half of v.

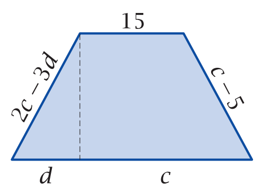
f) Number by 5 greater than x is by 2 smaller than y. Number 2 times smaller than x is 4 times smaller than y.

g) Number p is 3 greater than half number r, and the sum of the numbers p and r is equal to 18.

10. The following figures show a rectangle, an equilateral triangle and an isosceles trapezium. Calculate a, b, x, y, c i d.



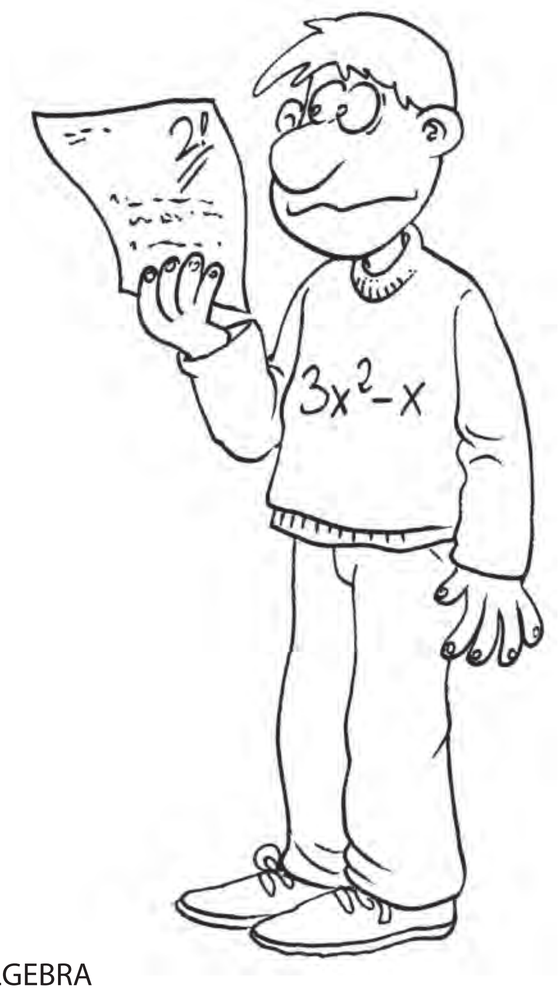




11. For which values a and b the solution to the system of equations written next to is the pair of numbers $x=3$ and $y=-2$?

$$\begin{cases} ax+by=4 \\ bx-ay=7 \end{cases}$$

REBUS MATEMATYCZNY 17



DZIAŁ: ALGEBRA

HASŁO:

CZARNA ŚMIERĆ

Czarną śmiercią nazwano tragiczną epidemię dżumy, która w XIV i XV wieku ogarnęła świat. Najprawdopodobniej miała ona swój początek w środkowej Azji, a stamtąd przeniosła się na zachód, dziesiątkując ludność Indii, Bliskiego Wschodu i północnej Afryki, aż w końcu dosięgnęła Europy.

Kulminacyjnym okresem czarnej śmierci były lata 1347–1351, kiedy to w samej Europie z powodu epidemii zmarło ponad 20 mln osób, a liczba ludności na świecie zmniejszyła się o około 100 mln, czyli ponad 20%.

Bezsprzecznie czarna śmierć miała znaczący wpływ na losy ludzkości. Ciekawe, ilu ludzi żyłoby dziś na świecie, gdyby nie śmiertelne żniwo tej epidemii. Spróbujmy oszacować tę liczbę.

1. W tabeli obok podano szacunkowe dane dotyczące liczby ludności świata w ostatnim tysiącleciu. Narysuj wykres zależności liczby ludności od czasu. Omów ten wykres.

Rok	Liczba ludności świata (w mln)
1000	250
1100	300
1200	400
1300	430
1348	470
1400	370
1500	460
1600	580
1700	680
1800	950
1900	1630
2000	6010

2. Aby określić liczbę ludności świata po upływie okresu t lat, można posłużyć się wzorem:

$$L_2 = L_1 a^t$$

L_1 — liczba ludności na początku okresu
L_2 — liczba ludności na końcu okresu
a — stała opisująca roczny przyrost naturalny

Oblicz wartości stałej a dla kolejnych okresów (1000–1100 itd.), korzystając z powyższego wzoru i danych z tabeli.

Na przykład w celu obliczenia wartości stałej a dla okresu 1000–1100, przyjmij:

$$L_1 = 250, \quad L_2 = 300, \quad t = 100$$

Obliczone wartości stałej a przedstaw w tabeli.

3. Spróbuj oszacować, ilu ludzi żyłoby na świecie, gdyby epidemia czarnej śmierci została ludzkości oszczędzona. Przyjmij, że poza tym wszystkie pozostałe wydarzenia ostatniego tysiąclecia potoczyłyby się tak samo. Pamiętaj, że liczba ludności na świecie w latach poprzedzających czarną śmierć się nie zmienia.

Aby przewidzieć liczbę ludności w 1400 roku (bez czarnej śmierci), załóż, że dla całego XIV wieku wartość stałej a była taka sama, jak obliczona przez ciebie dla okresu 1300–1348. Dla pozostałych stuleci przyjmij, że wartości stałej a pozostają bez zmian. Korzystając z tak ustalonych wartości stałej a i wzoru z punktu B, oblicz liczbę ludności na przełomach kolejnych stuleci i przedstaw te dane w tabeli.

4. Porównaj liczby otrzymane w punkcie C z liczbami z tabeli na poprzedniej stronie. Narysuj wykres zależności liczby ludności świata (bez czarnej śmierci) od czasu w tym samym układzie współrzędnych co wykres z punktu A. Omów otrzymane wyniki.

Rok	Liczba ludności Europy (w mln)
1000	38
1100	48
1200	59
1300	70
1348	75
1400	55
1500	83
1600	95
1700	135
1800	203
1900	408
2000	740

Co dalej?

1. W tabeli obok przedstawiono szacunkowe wartości liczby ludności Europy w ostatnim tysiącleciu. Zanalizuj te dane w podobny sposób, jak zrobiłeś to dla liczby ludności świata, i oszacuj, ilu mieszkańców liczyłaby dzisiaj Europa, gdyby nie epidemia czarnej śmierci.

2. Zbierz i opracuj informacje potrzebne do oszacowania wpływu innych wydarzeń historycznych na liczbę ludności świata, Europy, Polski lub twojego miasta.

Marek Pisarski

Karta pracy do filmu
Ukryte działania

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe

Karta pracy do filmu *Ukryte działania*

A. Wstęp przed filmem

Ukryte działania (*Hidden Figures*) to film w reżyserii Theodore'a Melfiego z roku 2016. Scenariusz do niego napisali reżyser i Allison Schroeder na podstawie książki pod tytułem *Hidden Figures: The American Dream and the Untold Story of the Black Women Who Help Win the Space Race*. W rolach głównych występują trzy czarnoskóre aktorki: Taraji P. Henson, Octavia Spencer i Janelle Monae, a oprócz nich zobaczymy także Kevina Costnera oraz Mahershala Aliego – zdobywców Oscarów.

Film przedstawia fragment historii technologicznego wyścigu o prymat w przestrzeni kosmicznej, który miał miejsce w latach 50. i 60. XX wieku pomiędzy Stanami Zjednoczonymi a Związkiem Radzieckim. Zwracając uwagę na osiągnięcia obu państw oraz na zespołowy charakter pracy nad kosmicznymi projektami, często pomijamy znaczący wkład osób, które nie pojawiały się na okładkach ówczesnych gazet i czasopism. Zarówno książka *Hidden Figures*, jak i film należą do kanonu współczesnych „lektur" obowiązkowych, dzięki którym praca tych ludzi zostaje wreszcie pokazana i doceniona. Oglądając *Ukryte działania*, docenimy rolę licznej grupy Afroamerykanek zaangażowanych w prace rachunkowe i koncepcyjne przy najważniejszych projektach najtrudniejszych lat kosmicznego wyścigu. Zanim zaczęto wykorzystywać komputery, podstawowymi narzędziami w ich pracy były kartki i ołówki oraz proste kalkulatory. Film dotyka także bolesnych problemów związanych z segregacją rasową i dyskryminacją.

Nie są one typowe wyłącznie dla Stanów Zjednoczonych lat 60. Oglądając film, warto zastanowić się nad tym, jakie podobnie niekorzystne zjawiska społeczne dotyczą każdej i każdego z nas oraz jaką rolę w pozytywnej zmianie wzajemnego nastawienia do siebie dużych grup społecznych odgrywają silny charakter i zdeterminowanie pojedynczych osób działających w małych grupach na rzecz zmiany. Warto też pomyśleć o znaczeniu szeroko rozumianej edukacji w zakresie przedmiotów ścisłych w walce o zajęcie godnego miejsca w hierarchii społecznej.

Po obejrzeniu filmu **nie będziemy** analizować trudnych naukowych zagadnień, takich jak dynamika magnetoplazmy, wzory Freneta, metoda Eulera czy ortogonalizacja Grama-Schmidta. Być może jednak niektórzy z Was zechcą sprawdzić znaczenia tych i innych pojęć, łączących matematykę i fizykę w całość, w której nie da się odróżnić poszczególnych dziedzin – ta jedność nauk ścisłych jest ważnym osiągnięciem rewolucji naukowych rozpoczętych jeszcze w XVI wieku.

Warto też wspomnieć niedawną pięćdziesiątą rocznicę zakończenia wyścigu o prymat w kosmosie spektakularnym lądowaniem na Księżycu astronautów amerykańskiej misji Apollo 11.

B. Zagadnienia do poruszenia po filmie, na przykład w formie dyskusji panelowej lub pracy w grupach

1. Czy warto było obejrzeć ten film i polecić go innym? Jeśli tak, dlaczego?

Kilka propozycji odpowiedzi:

a) Film ma bardzo dobrze skonstruowaną fabułę. W charakterystyczny dla amerykańskiego kina sposób zaznacza kontrasty pomiędzy znaczeniem poszczególnych bohaterów oraz typowymi sytuacjami ilustrującymi problematykę filmu: dyskryminacja grup społecznych ze względu na płeć, społeczne pochodzenie, kolor skóry, miejsce w hierarchii społecznej czy zawodowej oraz problematyczny prymat mężczyzn w zawodach inżynierskich.

b) Film dotyczy wydarzeń historycznych, które miały swój początek tuż po II wojnie światowej i określane są terminem „zimna wojna". Napięciom politycznym między krajami tak zwanego bloku zachodniego i bloku wschodniego towarzyszyła rywalizacja o przestrzeń kosmiczną – możliwą do wykorzystania militarnie, zarówno do celów szpiegowskich, jak i bezpośrednio jako miejsce walki. Film przypomina te związki między wyścigiem zbrojeń a rozwojem nauki i techniki w służbie potrzeb życia codziennego. Także dzisiaj dziedziny wiedzy podporządkowane celom wojskowym oraz dziedziny w służbie cywilnej rozwijają się, wspierając nawzajem.

c) Film zmusza do zastanowienia się nad różnymi dyskryminacjami obecnymi w naszym życiu społecznym. Oglądając go, można stawiać następujące pytania: Jakie niezależne ode mnie wpływy stoją na przeszkodzie rozwoju moich aspiracji i talentów? Jakie przeszkody warto usuwać na drodze do realizacji moich pozytywnych celów długofalowych? Jaką rolę w realizacji moich pragnień związanych z lepszym życiem odgrywa solidna edukacja w kierunkach związanych z matematyką? Jej znaczenie dla społecznego awansu zawsze było duże. Film zachęca do poważnego wzięcia pod uwagę tej drogi.

d) Dostrzeżenie u dziecka talentu do nauki przedmiotów ścisłych wyznacza kierunek jego rozwoju. Brak odpowiedniego, wcześnie udzielonego wsparcia osobom z matematycznymi predyspozycjami może prowadzić do szkolnych niepowodzeń i zmarnowania szans na życiowy sukces. Film sprzyja refleksji. Do której grupy uczniów należę: tych z matematycznie nastawionym umysłem czy tych z góry skazanych na niepowodzenia w matematyce? A jeżeli do tej drugiej, to jak do tego doszło i co zrobić, żeby rozwiązać osobisty problem „matematycznej dyskryminacji"?

e) Osoby niezainteresowane matematyką i problemami własnej kariery zwrócą przede wszystkim uwagę na dobrą grę aktorek i aktorów. Film ma doborową obsadę i świetnie skonstruowane dialogi. Ponadto nie wymaga dużego wysiłku podczas oglądania; stanowi zatem dobrą rozrywkową propozycję na czas wolny.

2. O czym jest film *Ukryte działania*?

Kilka propozycji odpowiedzi:

a) Film opowiada o pracy pionierów w nowej dziedzinie – załogowych lotów kosmicznych – którzy zmagają się z niespotykanymi wcześniej problemami z zakresu matematyki i fizyki. Rozwiązując je, muszą czasem korzystać ze szkolnej wiedzy. Film ciekawie przedstawia fragment biografii trzech kobiet, które odegrały pionierską rolę w rozwoju technologii kosmicznej; rolę decydującą i dotychczas niedocenioną. Były to **Katherine G. Johnson**, **Dorothy Vaughan** i **Mary Jackson**.

b) Film podkreśla znaczenie indywidualnych decyzji poszczególnych ludzi zmagających się ze skutkami społecznych nierówności i wpływ tych osób na pozytywne zmiany w kierunku wyrównywania szans. Opowiada o konieczności zastępowania niesprawiedliwych reguł społecznych i ustanawiania sprawiedliwych. O wykraczaniu poza niegodziwe normy, ustanowione obyczajem lub prawem, zmniejszające szansę awansu poszczególnych jednostek. Prezentuje także odważne postawy towarzyszące rozwiązywaniu konfliktów w sposób pokojowy, w których każda ze stron odnosi sukces.

c) Film mówi o roli, jaką odgrywała matematyka w edukacji i pracy zawodowej jego bohaterów. Pokazuje różne podejścia do matematyki i jej zastosowania. Rozwój matematyki przekłada się na rozwój innych dziedzin, w tym służących nam na co dzień. Rozwiązując nowe problemy, wciąż odwołujemy się do dawnych metod i narzędzi. Wartością jest także sprawność rachunkowa, która choć może nie wymaga dużej wiedzy matematycznej, ale może być użyteczna podczas programowania komputerów.

d) Film pokazuje, jak można pogodzić ciekawe życie zawodowe z owocnym życiem rodzinnym. Jego bohaterowie godzą te często sprzeczne ze sobą aspekty życia. Film opowiada o koniecznych poświęceniach, ale też o poszukiwaniu i korzystaniu z odpowiedniego wsparcia najbliższych.

C. Warte omówienia kluczowe sceny związane z matematyką

00:45–2:32 „Panno Coleman, rozwiąże pani to równanie?... Dopilnujcie jej rozwoju"

Film rozpoczyna scena ukazująca zainteresowanie matematyką młodej Katherine Johnson; zarówno światem liczb (algebra), jak i figur (geometria). Warto prześledzić wyliczankę ośmioletniej dziewczynki i spróbować ją kontynuować wspólnie według tej samej reguły. Jak daleko uda nam się dostrzegać w ciągu kolejnych liczb naturalnych liczby pierwsze? W których miejscach geometrycznego witraża dziewczynka widzi wyliczane figury? Gdzie zauważamy wokół siebie figury płaskie i przestrzenne, które potrafimy nazwać pojęciami z lekcji matematyki? Czy przypominamy sobie podobne sceny z własnego dzieciństwa? Jak można pomagać sobie i innym w odkrywaniu matematyki w regularnościach spotykanych na co dzień?

Przyjrzyjmy się zadaniu Katherine. Oto ono:

Rozwiąż równanie dla zmiennej x. $\qquad (x^2 + 6x - 7)(2x^2 - 5x - 3) = 0$

Młoda uczennica korzysta z reguły dotyczącej iloczynu równego zero. Następnie, nie korzystając ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego, rozkłada w pamięci oba trójmiany kwadratowe na iloczyny, z których potrafi odczytać rozwiązanie. Starsze koleżanki i starsi koledzy patrzą z podziwem. Ten emocjonalny aspekt rozwiązania zadania ma duże znaczenie. Buduje w Katherine pewność siebie i opanowanie w trudnych sytuacjach, a także motywuje do poszerzania wiedzy. Jeśli podobnych doświadczeń brakuje w naszej szkolnej karierze, z pewnością odniesiemy w niej mniej sukcesów niż moglibyśmy. Może zatem warto zadbać o takie sytuacje, w których naszym udziałem będzie autentyczny publiczny sukces, nawet jeśli będzie niewielki lub nie będzie mu towarzyszył tak duży zachwyt jego świadków, jak pokazany w filmowej scenie?

Zwróćmy uwagę, że uczniowie wszystkich krajów w ciągu ostatnich stu lat (co najmniej) uczą się na lekcjach matematyki (poziom podstawowy) mniej więcej tych samych zagadnień. Umiejętności matematyczne nabywane w szkołach są niepodważalnym elementem kultury ludzkości, stosowane właściwie służą postępowi cywilizacyjnemu.

Warto też zwrócić uwagę na scenę, w której nauczyciel Katherine wręcza swojej zdolnej uczennicy kredę, prosząc o rozwiązanie równania. Podobna sytuacja (kreda ma ten sam kształt) powtarza się w innym miejscu filmu, co ma nas utwierdzić w przekonaniu, że wczesne doświadczenia mają wpływ na nasze działania w wieku dojrzałym.

09:45–10:20 „Kosmos i biznes. Potrzebuję matematyka.
Nikt się tu nie zna na geometrii analitycznej?"

Dlaczego pan Al Harrison (fikcyjna postać w filmie, łącząca w sobie osoby trzech dyrektorów NASA z czasów, w których pracowała tam Katherine Johnson) jest tak żywo zainteresowany zatrudnieniem specjalisty z geometrii analitycznej?

Aby dokonywać obliczeń dotyczących trajektorii lotu statków kosmicznych, należy rozważać ich ruch w układzie współrzędnych z jednoczesnym uwzględnieniem czasu. Potrzebujemy zatem układu o trzech osiach odpowiadających umiejscowieniu w przestrzeni oraz funkcji opisujących zmiany tego położenia w zależności od czasu. Tym dokładnie zajmują się geometrzy analityczni. Tory lotu rakiet i załogowych kapsuł w kosmosie przyjmują kształty znanych figur płaskich uzyskiwanych jako przekroje stożka. Są to: okrąg, elipsa, parabola i hiperbola. Najtrudniejszym zagadnieniem było wtedy opisywanie równaniami przejść z ruchu wzdłuż jednej krzywej na ruch względem innej, w szczególności z ruchu po eliptycznej orbicie wokół Ziemi na ruch po paraboli – optymalnej krzywej spadku na powierzchnię oceanu w odpowiedni jego obszar.

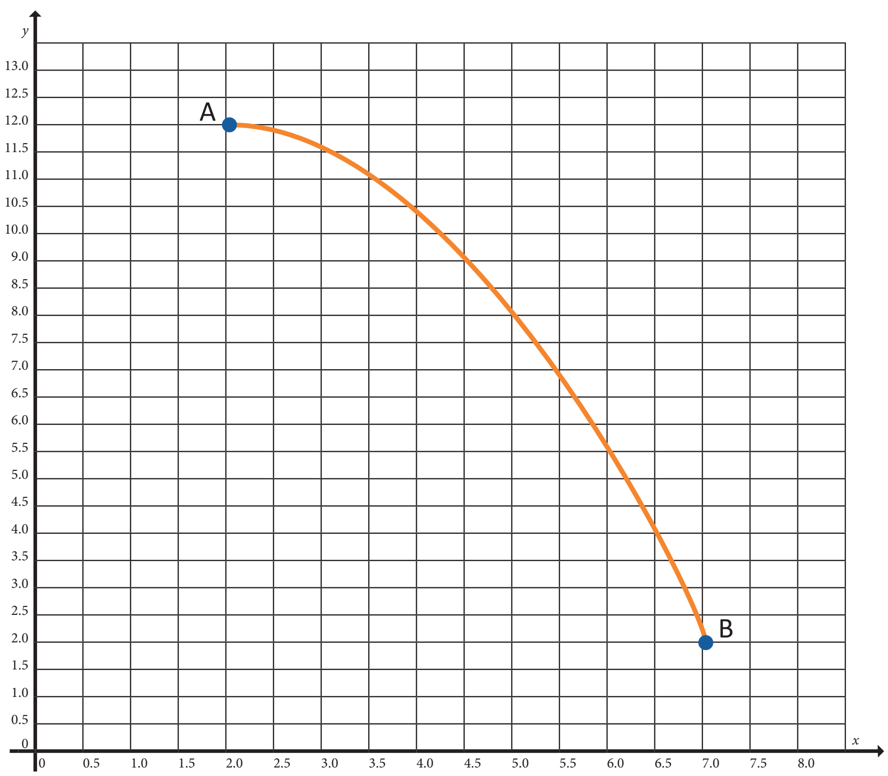
Warto rozwiązać bardzo uproszczone analogiczne zadanie.

W prostokątnym układzie współrzędnych o osi pionowej *y* i poziomej *x* znajduje się punkt *A* o współrzędnych (2, 12). Znajdź równanie paraboli o wierzchołku w punkcie *A* przechodzącej przez punkt *B* o współrzędnych (7, 2). Punkt *A* oznacza położenie kapsuły z astronautą w punkcie przejścia z orbity eliptycznej na paraboliczną, a punkt *B* wyznacza położenie kapsuły w momencie otwarcia spadochronu.

Rozwiązując ten problem, możemy wczuwać się rachmistrzów w NASA z lat 60. My także będziemy mogli korzystać z kalkulatorów. Możemy sprawdzać poprawność rachunków, generując wykres ustalonej funkcji. Dojdźmy do wyniku jak najszybciej. Policzmy, ile razy popełniliśmy błąd. Nasze obliczenia dotyczą jedynie toru lotu przebiegającego w jednej płaszczyźnie. Nie uwzględniliśmy też rachunków związanych z prędkościami i czasem lotu. Korzystaliśmy tylko z najprostszych narzędzi geometrii analitycznej.

Odpowiedź: Droga rozwiązania zadania prowadzi przez układ trzech równań z trzema niewiadomymi. Litery a, b, c oznaczają współczynniki funkcji kwadratowej $f(x)=ax^2+bc+c$.

$$\begin{cases} 49a+7b+c=2 \\ 4a+2b+c=12 \\ 9a-3b+c=2 \end{cases}$$



$f(x)=-0{,}4x^2+1{,}6x+10{,}4.$

10:35–11:34 „Eleanor. Redukcja danych, budynek 202”

Oglądając film, spotykamy się z wieloma pojęciami, które brzmią obco, naukowo; nie słyszymy o nich na lekcjach. Niektóre są trudne do wyjaśnienia językiem, którego używamy w szkole. „Redukcja danych” nie jest jednak jednym z nich. Zagadnienie to łatwo wyjaśnić i wykorzystać, definiując jako proces wybierania spośród wielu informacji podawanych w zadaniach tylko tych, które rzeczywiście mają znaczenie dla rozwiązania problemu. To pierwszy krok wymagany podczas radzenia sobie z każdą trudnością lub zadaniem. Następny to porządkowanie zebranych informacji, wyszukiwanie lub wyprowadzenie brakujących oraz wykorzystanie tak zgromadzonych danych, na przykład przez wpisanie ich do odpowiednich wzorów (modeli), dzięki którym poprzez odpowiednie rachunki uzyskamy wynik wart interpretacji. Wynik ten należy ładnie przedstawić w formie czytelnego raportu i przekazać do oceny przełożonemu, co często widzimy w innych scenach filmu. Tych umiejętności uczymy się w szkole.

Znaczenie terminu „redukcja danych” można utrwalić w punkcie dotyczącym kart perforowanych.

25:30–26:35 „Patrz poza te liczby. Dookoła. Na wylot.
Szukaj odpowiedzi na niezadane pytania. Inaczej wszystko na nic”

Na tle pozostałych, podobnych do siebie, jednakowo ubranych i zachowujących się kolegów Katherine wyróżnia się pod każdym względem. Jej wykluczenie ze społeczności wydaje się działać jednak na jej korzyść. Nie ma nic do stracenia, a wszystko do zyskania. Czy ta sytuacja nie przypomina trochę klasy szkolnej, na którą patrzymy z punktu widzenia pojedynczego, wyjątkowego ucznia? Czy każda uczennica i każdy uczeń nie mogą zadać sobie pytania w rodzaju: na czym polega moja INNOŚĆ, wyjątkowość i mój talent, który mogę rozwijać w szkole, stosując się do mądrych wskazówek dyrektora Harrisona? Jak zinterpretować je niekoniecznie w kontekście matmatyki? Jak wykorzystać swoje umiejętności, żeby znaleźć w przyszłości dobrą pracę? Zdanie „Inaczej wszystko na nic” warto potraktować jako przestrogę.

50:34–51:05 „Fortran jest nowym językiem używanym przez programistów
do komunikacji z komputerami. To pasjonujący krok w przyszłość”

Fortran (FORmula TRANslator) to rozwijany od początku lat 60. XX wieku język, w którym przekazuje się polecenia komputerowi. Początki jego stosowania łączą się ściśle z czasem akcji filmu. NASA korzystała i korzysta z najnowocześniejszych osiągnięć nauki i techniki. Mimo tego, że do użytku wchodzą dziś coraz to nowsze języki programowania, FORTRAN jest wciąż rozbudowywany i stosowany. Coraz bardziej ceniona jest także umiejętność programowania. Wbrew pozorom nie jest trudno ją opanować. Istnieją bogate biblioteki gotowych programów, dzięki którym możemy rozwiązać prawie wszystkie zadania obliczeniowe. Pozostaje umiejętność obsługi sprzętu. Przez ostatnie 60 lat programiści stali się bardzo poszukiwanymi i dobrze zarabiającymi pracownikami w każdym rozwijającym się kraju. Dorothy dość wcześnie zrozumiała wartość i użyteczność pracy programisty.

58:50–60:00 „System obliczeniowy IBM 7090 dokonuje ponad 24 000 operacji na sekundę.”

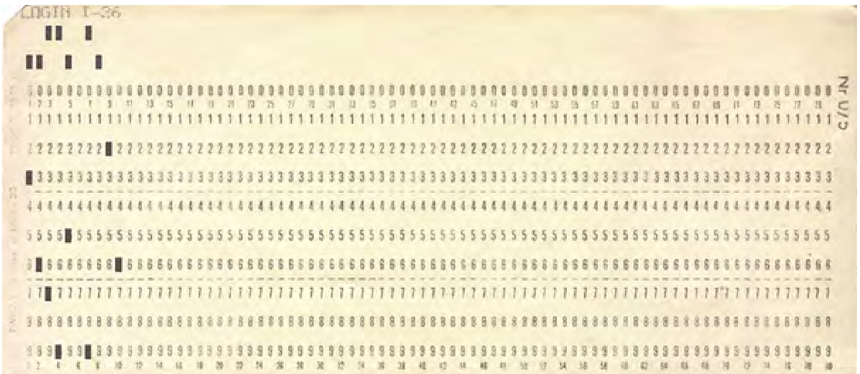
A ile operacji na sekundę wykonują nasze podręczne komputery, smartfony i konsole?

Moc obliczeniowa komputera to jeden z jego ważnych parametrów. Określa się ją właśnie jako liczbę operacji wykonywanych przez dane urządzenie w ciągu jednej sekundy. Rozumiemy zdziwienie na twarzach bohaterek filmu. IBM z lat 60. XX wieku liczył znacznie szybciej niż człowiek. Czy podobne zdziwienie wywoła porównanie mocy obliczeniowej IBM sprzed pół wieku z mocą współczesnego laptopa czy smartfonu? Warto sobie uświadomić, że komputery pokładowe na statkach kosmicznych misji Mercury czy Apollo, w tym komputer na pokładzie słynnego Apollo 11, miały tę moc nieprawdopodobnie małą w porównaniu z mocą późniejszych urządzeń.

Komputer IBM 7090 wykonywał operacje z szybkością rzędu 104 operacji na sekundę, czyli 104 FLOPS (*floating point operations per second*; 1 FLOPS – 1 operacja na sekundę). Rozwój procesorów w ciągu ostatnich 60 lat znacznie przyśpieszył ich działanie i obecnie szybkość naszych smartfonów, konsoli i laptopów osiągnęła rząd 1 TFLOPS, czyli 1012 FLOPS. Wzrosła zatem 100 milionów razy! Jest ona także zależna od rodzaju procesora. Procesory obsługujące dane na potrzeby grafiki (GPU) są kilkunastokrotnie szybsze od tych, które zaspokajają pozostałe potrzeby obliczeniowe (CPU).

58:50–60:00 „To działa. Jak to działa?”

Dorothy korzysta z perforowanych kart, nieco większych od tej.



W pierwszych maszynach cyfrowych (IBM) informacje kodowano w specjalnych dziurkarkach kart perforowanych. Pomysł wprowadzenia takich kart do przekazywania informacji urządzeniom był stosowany dużo wcześniej. Wykorzystywano je w maszynach tkackich oraz podczas obliczania wyników wyborów już w XIX wieku. Z czasem rozmiary kart ujednolicono. Standardowa miała wymiary 187,325 mm na 82,55 mm. Każda karta do komputera pokazanego na filmie składała się z 80 kolumn. W każdej z nich mógł być zapisany jeden znak, czyli 1 bajt informacji. Karty te miały grubość około 0,18 mm i ważyły po około 2 g (stos 2 tysięcy kart miał grubość 355 mm). Aby uruchomić program, karty z danymi i instrukcjami zapisanymi w języku programowania (Dorothy, jak pamiętamy, używała języka Fortran) umieszczało się w czytniku kart. Nie trzeba dodawać, że karty musiały być przed włożeniem ułożone w odpowiedniej kolejności. Niektórzy uważali, że przy tej technologii i takiej szybkości obliczeniowej do obsługi zadań informatycznych naszej cywilizacji wystarczy kilkanaście podobnych maszyn IBM wypełniających duży pokój. Być może było tak w latach 60. XX wieku. Teraz dyski komputerowe domowych laptopów mają pojemności sięgające 1 TB, a potrzeby związane z informatyczną obsługą ludzkości stale rosną.

Zadanie. Jak wysoko sięgałby stos kart perforowanych, na których optymalnie zakodowano by 320 GB informacji? Ile ważyłby taki stos? Ilu boiskom piłkarskim o wymiarach 105 m na 68 m odpowiadałaby suma pól powierzchni wszystkich tych kart?

Rozwiązanie:

$320 \text{ GB} = 320 \cdot 10^9 \text{ B}$; $320 \cdot 10^9 \text{ B} \div 80 \text{ B} = \mathbf{4 \cdot 10^9}$ **kart**

$4 \cdot 10^9 \cdot 0{,}18 \text{ mm} = 720 \cdot 10^6 \text{ mm}$; $720 \cdot 10^6 \div 10^6 =$ **720 km**

$4 \cdot 10^9 \cdot 2 \text{ g} = 8 \cdot 10^9 \text{ g} =$ **8000 t**

$4 \cdot 10^9 \cdot 0{,}187325 \cdot 0{,}08255 \div (105 \cdot 68) =$ **8663,12535 m^2**

Odpowiedź:

Stos kart perforowanych „o pojemności” 320 GB miałby 720 km wysokości i ważyłby 8 tysięcy ton. Karty te wypełniłyby 8663 standardowe boiska do piłki nożnej.

01:23:05–01:26:20 „Z jaką prędkością kapsuła okrąża Ziemię?”

Aby statek kosmiczny mógł znaleźć się na orbicie Ziemi, trzeba mu nadać odpowiednią prędkość. Energia kinetyczna statku musi być na tyle duża, żeby pokonać siłę przyciągania naszej planety. Korzystając z odpowiednich wzorów, obliczono, że wynosi ona 7,91 km/s. Wartość tę nazwano pierwszą prędkością kosmiczną. Gdyby statkowi nadano większą prędkość, np. wyższą niż 11 km/s, wyszedłby on na stałe z zasięgu ziemskiego przyciągania i nie mógłby poruszać się po orbicie wokół naszej planety. Przy konstrukcji odpowiednich rakiet nośnych trzeba było starannie wykorzystać tę wiedzę. Prędkość poruszania się po orbicie nie może być także o wiele mniejsza niż wyliczona, gdyż satelita od razu zacząłby spadać na Ziemię. Prędkość 7,91 km/s jest graniczną prędkością, przy której statek kosmiczny co prawda spada na Ziemię, ta jednak stale „ucieka” przed nim, a więc do spotkania obu ciał nie dochodzi. Według tego samego prawa planety krążą wokół Słońca.

Tłumacz dialogów obliczył, że kapsuła wchodzi na orbitę z prędkością 28 234 km/h. W wersji angielskiej ta prędkość wynosi 17,544 mil/h. Od 1 lipca 1959 roku ujednolicona wartość 1 mili w metrach wynosi 1609,344. Warto sprawdzić, czy tłumacz prawidłowo przeliczył jednostki, a jeśli nie, to jaki błąd popełnił (błąd w tym wypadku to odpowiedź na pytanie, o ile procent prawidłowy wynik różni się od przybliżonego). Warto też sprawdzić, o ile podana na filmie prędkość wejścia na orbitę różni się od pierwszej prędkości kosmicznej. Czy możliwe jest, żeby główny inżynier projektu, Paul Stafford (postać fikcyjna), zapytany o tę prędkość, mógł nie znać jej wartości? Jakie jeszcze poważne wątpliwości dotyczące prawdopodobieństwa tej sceny moglibyśmy mieć?

Odpowiedź: Pierwsza prędkość kosmiczna to 28 476 km/h i jest bliska prędkości statku kosmicznego na orbicie. Różni się niewiele od prędkości podanej na filmie. Każdy, kto ma związek z wyliczeniami orbitalnych torów ruchu, musi znać tę wartość na pamięć.

D. O czym jeszcze warto porozmawiać

1. Warto opracować lub odszukać w internecie kalendarium wydarzeń związanych z rywalizacją o technologiczny prymat w kosmosie pomiędzy Stanami Zjednoczonymi a Związkiem Radzieckim. Jakie było podłoże polityczne tego wyścigu? Jakie znaczenie polityczne i militarne miało zwycięstwo w kosmosie ekipy amerykańskiej? Jakim kosztem osiągnięto ten sukces? Jakie były etapy i na czym polegała przewaga jednej ze stron podczas tej rywalizacji? Jakie znaczenie dla ludzkości miały techniczne osiągnięcia wypracowane podczas zimnowojennego kosmicznego wyścigu? Jakie były kolejne jego etapy, ale też etapy współpracy podczas podboju kosmosu? W jakiej formie i z jakimi wynikami rywalizacja o przestrzeń kosmiczną toczy się obecnie? Jakie ciekawe osiągnięcia w zakresie nauk związanych z nią notowaliśmy ostatnio?

Jakie zadania w naukach o kosmosie i związanych z jego podbojem stoją jeszcze przed naszą cywilizacją? Dlaczego warto się nimi interesować? Jak mogą wpłynąć na nasze życie?

2. Ważnym, chociaż drugoplanowym bohaterem filmu i bohaterem narodowym Stanów Zjednoczonych jest John Glenn. Wymieniono też z nazwiska dwóch innych astronautów, którzy jako pierwsi odbyli loty suborbitalne w maju i lipcu 1961 roku: Alana Sheparda (to pierwszy amerykański astronauta) i Virgila Grissoma. Kariery zawodowe tych astronautów są ciekawe i godne zbadania.

3. Warto dowiedzieć się więcej o pierwszym i jedynym Polaku, który odbył lot w kosmos, Mirosławie Hermaszewskim, a także o polskich naukowcach pracujących przy badaniach dotyczących lotów kosmicznych.