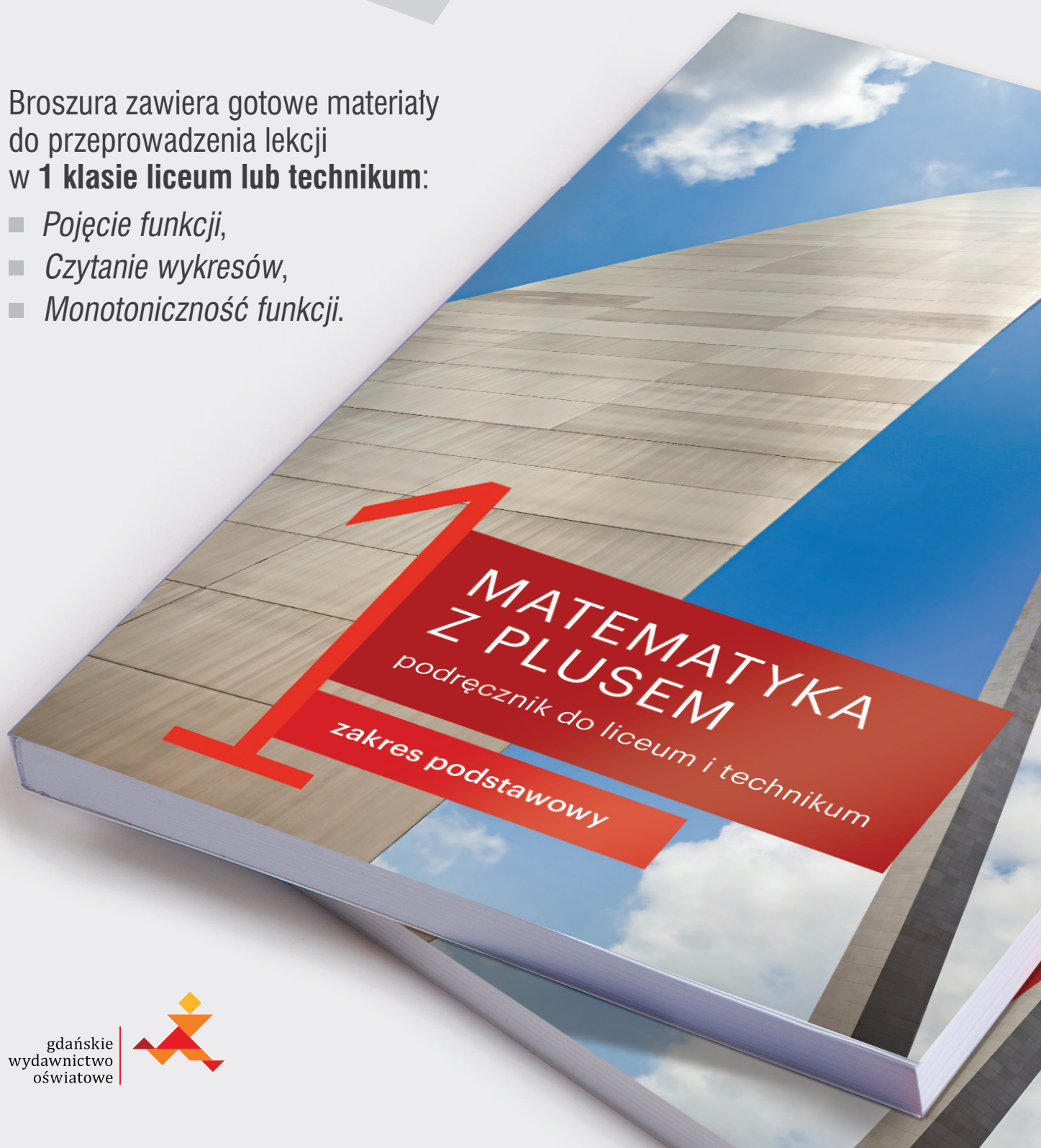


JAK SIĘ UCZY Z $M+$? **SPRAWDŹ NAS!**



Broszura zawiera gotowe materiały
do przeprowadzenia lekcji
w **1 klasie liceum lub technikum**:

- *Pojęcie funkcji,*
- *Czytanie wykresów,*
- *Monotoniczność funkcji.*



Wstęp

Oddajemy w Państwa ręce zestaw materiałów, który umożliwia przeprowadzenie wraz z uczniami z 1 klasy liceum lub technikum (kształcących się wg podstawy dla zakresu podstawowego) zajęć z trzech tematów działu *Funkcje*:

- *Pojęcie funkcji,*
- *Czytanie wykresów,*
- *Monotoniczność funkcji.*

Do realizacji wskazanych zagadnień przygotowaliśmy odpowiednie fragmenty podręcznika, zbioru zadań oraz ćwiczeń podstawowych. Ów zestaw poszerzyliśmy o dodatkowe pomoce – materiały dydaktyczne z bogatych zasobów udostępnianych bezpłatnie członkom klubu *M+*.

M+ odgruzowuje – sprytne zestawy zadań, które pomagają uczniom szybko odświeżyć wiedzę ze szkoły podstawowej przed realizacją nowych zagadnień dydaktycznych w 1 klasie liceum lub technikum.

Lekcje z wykopem – scenariusze niebanalnych zajęć lekcyjnych, które na długo zostaną w głowach uczniów. Punktem wyjścia jest ciekawy, niebanalny problem lub historia, która wydarzyła się naprawdę. Autorzy wyjaśniają zagadnienia matematyczne, wykorzystując dostępne przeciętnemu uczniowi narzędzia. Podążanie za proponowanym tokiem wykładu, odkrywanie tajemnicy sprawia, że lekcja zostaje na bardzo, bardzo długo w głowach uczniów.

Znajdź błąd – psychologia poznawcza podpowiada, że nauka na błędach (swoich bądź cudzych) to metoda z olbrzymim potencjałem do wykorzystania w edukacji dzieci i młodzieży. Przygotowane przez nas zestawy zadań ów fakt wykorzystują. Zadaniem uczniów jest wskazanie błędu w prezentowanych rozwiązaniach i skorygowanie go. Oczywiście błędy nie są zwykłymi pomyłkami rachunkowymi – weryfikujemy nimi zrozumienie zagadnień matematycznych przez Państwa podopiecznych.

Eksperymentarium z plusem – zbiór interaktywnych animacji. Umożliwiają uczniom samodzielne modelowanie wybranych zagadnień matematycznych i wyciąganie wniosków na bazie wprowadzanych zmian. To właśnie interaktywność naszego eksperymentarium wyzwała zaangażowanie u uczniów. Dzięki temu szybciej potrafią opanować, zrozumieć i ugruntować wiedzę – no i robią to z nieukrywaną przyjemnością.

Test do samodzielnej weryfikacji – wszyscy uczniowie mają dostęp do interaktywnych testów w Strefie ucznia www.gwo.pl/strefa-ucznia. To materiał, który wielu wykorzystuje do ostatnich przygotowań przed zbliżającymi się klasówkami. Chcemy pokazać go, gdyż w szybki, prosty i rzetelny sposób pozwala zweryfikować swoją wiedzę i umiejętności.

Mądre projekty – każdemu nauczycielowi zdarza się spotkać uczniów bardziej dociekliwych. Przygotowany materiał pozwala rozwijać potencjał takich właśnie osób – samodzielnie mogą zastosować zdobytą już wiedzę i umiejętności do bardziej złożonych zagadnień.

Wśród propozycji materiałów znajdują się także karty pracy stworzone przy wykorzystaniu *Kompozytora klasówek i kart pracy* – programu komputerowego służącego do szybkiego układania, zapisywania i drukowania różnych zestawów zadań z matematyki (w kilku wariantach). Zadania można dobierać m.in. według stopnia trudności oraz czasu potrzebnego na ich rozwiązanie. Do każdego zestawu zadań dołączony jest klucz odpowiedzi. Zachęcamy, aby wypróbować wersję demonstracyjną programu, odwiedzając stronę www.matematyka.kompozytorklasówek.gwo.pl.

Zdecydowaliśmy się także na zwrócenie Państwa uwagi na program *MatNau!* – interaktywny zbiór zadań z rozwiązaniami. Wchodząc na wskazaną stronę, otrzymają Państwo dostęp do wersji demonstracyjnej programu, który ma dwa oblicza. Dla nauczycieli to interaktywny zbiór zadań (do zakresu podstawowego). Szczególnie przydatny dla tych z Państwa, którzy lubią (i mają możliwość) wykorzystywać na lekcjach nowoczesne technologie. Dla ucznia to aplikacja, która motywuje do powtórek przed sprawdzianami i pomaga poprawić oceny z matematyki. Za pomocą krótkich filmów i komentarzy wyjaśnia krok po kroku, jak rozwiązywać różne typy zadań. Dodatkowo uczniowie mogą sprawdzić swoje umiejętności, wykonując interaktywne ćwiczenia.

Zapraszamy do wypróbowania *Matematyki z plusem* w czasie zajęć z uczniami. Wszystkich zainteresowanych naszymi propozycjami dydaktycznymi zachęcamy do odwiedzenia strony www.matematyka.gwo.pl.



M+ odgruzowuje

Zestaw zadań odświeżających wiedzę przed działem s. 3

Pojęcie funkcji

Podręcznik (fragmenty) s. 6

Zbiór zadań (fragmenty) s. 14

Ćwiczenia podstawowe (fragmenty) s. 19

Czytanie wykresów

Podręcznik (fragmenty) s. 24

Zbiór zadań (fragmenty) s. 32

Ćwiczenia podstawowe (fragmenty) s. 36

Monotoniczność funkcji

Podręcznik (fragmenty) s. 40

Zbiór zadań (fragmenty) s. 45

Ćwiczenia podstawowe (fragmenty) s. 51

Karty pracy z Kompozytora klasówek i kart pracy

Pojęcie funkcji s. 54

Czytanie wykresów s. 58

Monotoniczność funkcji s. 62

Materiały dodatkowe do wykorzystania przy realizacji działu *Funkcje*

Zestaw zadań *Znajdź błąd* s. 67

Interaktywne animacje *Eksperymentarium z plusem* s. 69

Funkcje – test ze Strefy ucznia s. 70

Praca badawcza *Mądre projekty. Prosta regresji* s. 72

Multipodręczniki dla klas 1 i 2 s. 74

MatNau! – interaktywny zbiór zadań z rozwiązaniami s. 75

**M+ ODGRUZOWUJE**

FUNKCJE

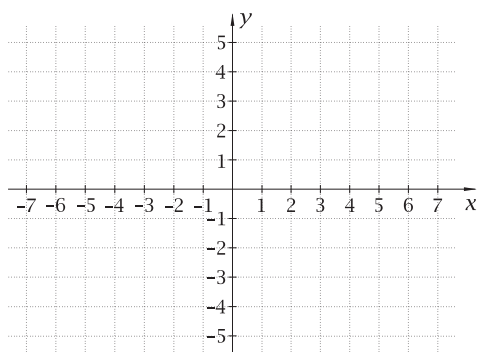


Zadanie 1. Zaznacz podane punkty w układzie współrzędnych.

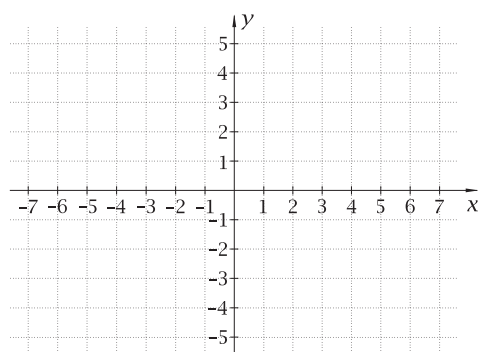
$$A = (-2, 1) \quad B = (0, 1) \quad C = (2, 3)$$

$$D = (3, 2) \quad E = (4, 0) \quad F = (-2, -1)$$

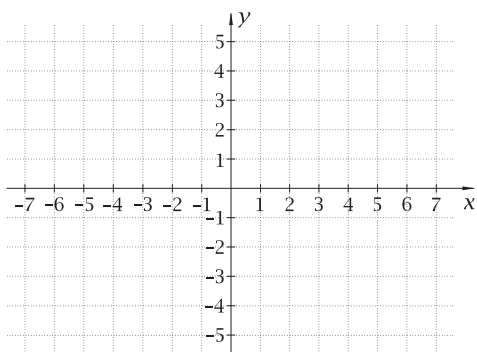
$$G = (0, -1) \quad H = (-2, -2) \quad I = (-5, 5)$$



Zadanie 2. Narysuj w układzie współrzędnych prostą, na której leżą punkty o pierwszej współrzędnej równej -3 . Podaj współrzędne trzech dowolnych punktów leżących na tej prostej.



Zadanie 3. Narysuj w układzie współrzędnych prostą, na której leżą punkty o drugiej współrzędnej równej 2 . Podaj współrzędne trzech dowolnych punktów leżących na tej prostej.



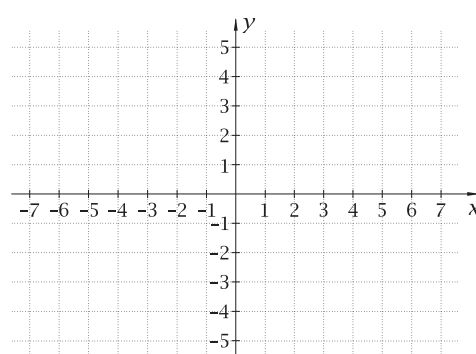
Zadanie 4. Zaznacz w układzie współrzędnych po 3 punkty spełniające warunek:

a) $x = y$,

b) $y = 2x$,

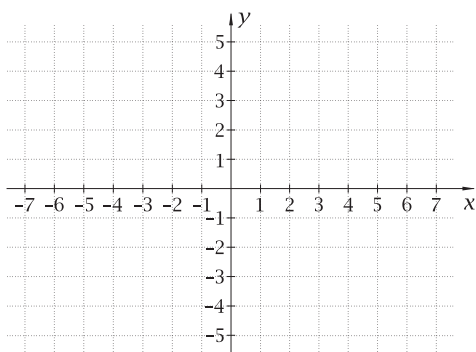
c) $x = -y$ i punkt (x, y) należy do II ćwiartki układu współrzędnych,

d) $x = y + 1$ i punkt (x, y) należy do III ćwiartki układu współrzędnych.

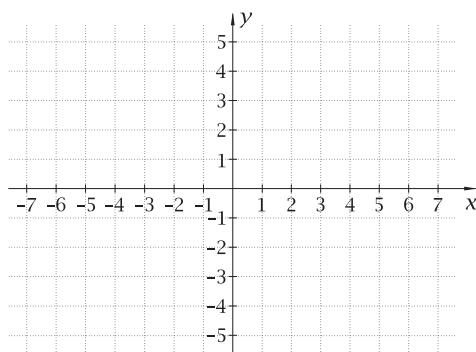




Zadanie 5. Zaznacz w układzie współrzędnych pięć punktów, których odległość od osi x jest równa 5.



Zadanie 6. Zaznacz w układzie współrzędnych wszystkie punkty oddalone od osi x o 3 jednostki, a od osi y — o 2 jednostki.

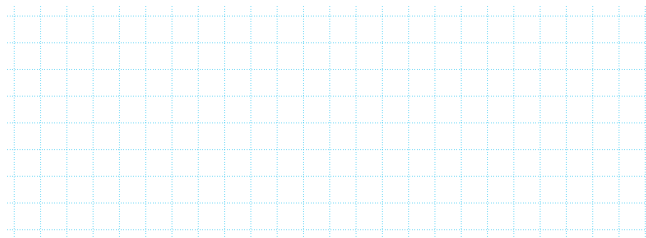


Zadanie 7. Pole trapezu obliczamy ze wzoru $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, gdzie a , b to podstawy trapezu, h — jego wysokość. Uzupełnij tabelę.

a	b	h	P
10	6	5	
	2	4	20
5	8		39

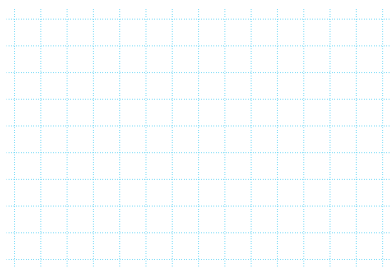
Zadanie 8. Wyznacz:

- a) h ze wzoru $P = \frac{1}{2}ah$
- b) x ze wzoru $y = 2x - 3$
- c) a ze wzoru $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$
- d) x ze wzoru $y = \frac{1}{x} + 2$



Zadanie 9. Pewien hotel oblicza koszty wynajęcia sali konferencyjnej, wykorzystując wzór: $C = \frac{5N}{2} + 500$, gdzie C — koszt wynajęcia [zł], N — liczba uczestników. Uzupełnij tabelę, a następnie zilustruj dane z tej tabeli w układzie współrzędnych.

liczba uczestników	20	40	60	80	100
koszt wynajęcia [zł]					





MATERIAŁY DO LEKCJI POŚWIĘCONYCH POJĘCIU FUNKCJI

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

- zadanie 7–10 ► — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii
- ◄ ||| — odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem |||
- — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)
 - — zadanie trudne

W zbiorze zadań przyjęto następujące oznaczenia:

- 12. — zadanie łatwe
- 12. — zadanie o średnim poziomie trudności
- 12. — zadanie trudne
- Я — zadanie z zakresu rozszerzonego



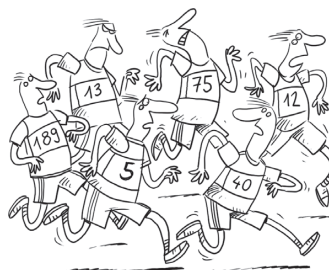
POJĘCIE FUNKCJI

- I Przyjrzyj się poniższej tabeli. Numerom zawodników biorących udział w biegu na 400 m przypisano uzyskane przez nich czasy.

x	189	13	5	75	40	12
y	46,22	47,98	47,36	48,07	46,21	45,88

x — numer zawodnika

y — czas biegu (w sekundach)



Z podobnymi sytuacjami spotykamy się bardzo często. Na przykład każdemu uczniowi jest przypisany jeden numer w dzienniku lekcyjnym, każda książka ma ściśle określoną liczbę stron, każde zwierzę można zakwalifikować do określonego gatunku. Odpowiada to następującemu schematowi:

Mamy pewien zbiór X oraz pewien zbiór Y i każdemu elementowi zbioru X przypisujemy lub — inaczej mówiąc — przyporządkowujemy dokładnie jeden element zbioru Y .

Przyporządkowanie, w którym każdemu elementowi zbioru X odpowiada dokładnie jeden element zbioru Y , nazywamy **funkcją** określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y .

Zbiór X , na którym jest określona funkcja, nazywamy **dziedziną** funkcji. Każdy element dziedziny nazywamy **argumentem** funkcji.

Jeżeli argumentowi x jest przyporządkowany element y , to mówimy, że funkcja dla argumentu x przyjmuje **wartość** y .

W naszym przykładzie X to zbiór numerów zawodników, a Y — zbiór możliwych do osiągnięcia czasów.

Każdemu zawodnikowi przyporządkowujemy uzyskany czas.

W naszym przykładzie funkcja określona jest na zbiorze numerów zawodników o wartościach w zbiorze możliwych do osiągnięcia czasów.

Zbiór $\{5, 12, 13, 40, 75, 189\}$ jest dziedziną funkcji, a każda liczba z tego zbioru jest argumentem.

Na przykład dla argumentu 5 omawiana funkcja przyjmuje wartość 47,36, a dla argumentu 12 — wartość 45,88.

ĆWICZENIE A Rozważ następującą funkcję: Każdemu uczniowi twojej klasy jest przyporządkowana liczba liter występujących w jego pierwszym imieniu.

Na przykład: jeśli w klasie jest Barbara, to przyporządkowujemy jej liczbę 7.

- Ile elementów ma dziedzina tej funkcji?
- Podaj wartości tej funkcji dla kilku wybranych argumentów.
- Jaką najmniejszą i jaką największą wartość przyjmuje ta funkcja?

zadanie 1 ►



- II Dziedziną funkcji może być dowolny zbiór i wartości funkcji też mogą być elementami dowolnego zbioru. W tym rozdziale będziemy rozważać przede wszystkim takie funkcje, których argumenty i wartości są liczbami.

Funkcję określamy, podając jej dziedzinę i sposób, w jaki argumentom przyporządkowywane są wartości. Możemy to zrobić na różne sposoby, na przykład za pomocą opisu słownego, tabelki, wykresu, wzoru lub grafu. Poniżej tę samą funkcję opisano na pięć różnych sposobów.

Oto możliwe przedstawienia.

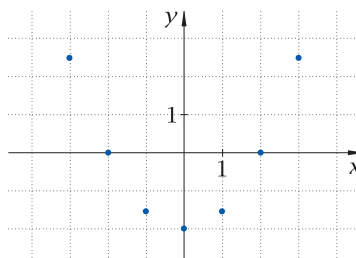
Opis słowny:

Każdej liczbie całkowitej x większej od -4 i mniejszej od 4 przyporządkowujemy liczbę y o 2 mniejszą od połowy kwadratu liczby x .

Tabelka:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$2\frac{1}{2}$	0	$-1\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{2}$

Wykres:

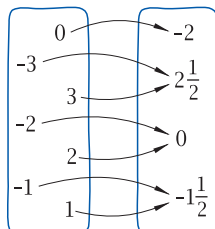


Wzór:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2$$

Liczbom x ze zbioru $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ funkcja przyporządkowuje liczbę y równą $\frac{1}{2}x^2 - 2$.

Graf:



Zaznaczone punkty tworzą wykres funkcji. Pierwsza współrzędna każdego z nich to argument funkcji, a druga — to wartość funkcji odpowiadająca temu argumentowi.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb: $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Każdej liczbie z tego zbioru jest przyporządkowana pewna liczba rzeczywista.

Z historii

O funkcji możemy myśleć jako o wzajemnej zależności między dwiema wielkościami.

Poszukiwaniem takich zależności zajmowali się już starożytni Grecy. Termin „funkcja” pojawił się jednak dopiero w XVII wieku, w pracy niemieckiego matematyka Gottfrieda Leibniza (czyt. Gotfryd Lajbnic). Definicję funkcji (jako przyporządkowania) pierwszy sformułował matematyk niemiecki Peter Dirichlet (czyt. Pejter Dirisłe) w 1837 roku.

Dzisiaj pojęcie funkcji jest jednym z najważniejszych pojęć matematyki.



Zdanie: Funkcja f argumentom ze zbioru X przyporządkowuje wartości ze zbioru Y możemy zapisać tak:

$$f: X \rightarrow Y$$

Zapis $f(x)$ oznacza wartość funkcji f dla argumentu x .

Rozważmy następującą funkcję:

Funkcja f każdej liczbie naturalnej przyporządkowuje resztę z jej dzielenia przez 3.

Dziedzinę funkcji f stanowi zbiór liczb naturalnych. Jej wartościami też są liczby naturalne. Tę informację możemy zapisać tak:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

Obliczmy wartości funkcji f dla argumentów: 0, 1, 20, 28, 42, 67.

$$f(0) = 0, \text{ bo } 0 : 3 = 0 \text{ reszta } 0$$

$$f(28) = 1, \text{ bo } 28 : 3 = 9 \text{ reszta } 1$$

$$f(1) = 1, \text{ bo } 1 : 3 = 0 \text{ reszta } 1$$

$$f(42) = 0, \text{ bo } 42 : 3 = 14 \text{ reszta } 0$$

$$f(20) = 2, \text{ bo } 20 : 3 = 6 \text{ reszta } 2$$

$$f(67) = 1, \text{ bo } 67 : 3 = 22 \text{ reszta } 1$$

ĆWICZENIE B Dla funkcji f określonej powyżej oblicz $f(2)$, $f(10)$, $f(15)$ i $f(100)$. Ile różnych wartości może przyjmować ta funkcja?

Zbiór wszystkich wartości, które przyjmuje funkcja, nazywamy **zbiorem wartości funkcji**.

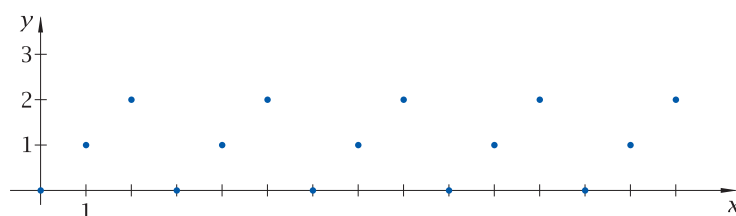
Uwaga. W zapisie $f: X \rightarrow Y$ zbiór X oznacza dziedzinę, ale zbiór wartości funkcji nie musi być równy zbiorowi Y , choć musi być jego podzbiorem.

Zauważmy, że zbiór wartości funkcji f rozważanej powyżej jest trzyelementowy: $\{0, 1, 2\}$ i jest oczywiście podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$.

ĆWICZENIE C Zapisz zbiór wartości funkcji przedstawionej na stronie 129.

zadania 2–4 ►

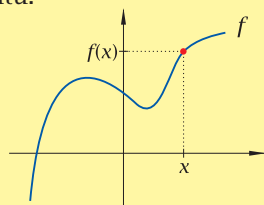
III Omawianą funkcję f można przedstawić za pomocą wykresu:



Powyższy wykres składa się z pojedynczych punktów, bo dziedziną jest zbiór $\mathbb{N}$. Wykresami funkcji mogą być też linie ciągłe lub ich fragmenty.



Do wykresu funkcji f należą wszystkie punkty o współrzędnych $(x, f(x))$, gdzie x jest elementem dziedziny, a $f(x)$ to wartość funkcji dla tego argumentu.



Gdy rysujemy wykres funkcji, warto pamiętać, że nie mogą do niego należeć dwa punkty o tej samej współrzędnej x , bowiem dowolna funkcja dla każdego argumentu przyjmuje tylko jedną wartość. Może się jednak zdarzyć, że dla różnych argumentów wartości będą jednakowe.

ĆWICZENIE D Narysuj wykres funkcji, która dla argumentów -2 , 0 i 3 przyjmuje tę samą wartość.

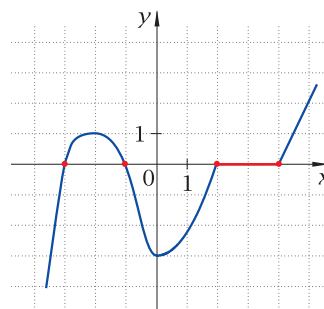
zadania 5–9

IV **ĆWICZENIE E** Dla jakich argumentów funkcja f opisana na poprzedniej stronie przyjmuje wartość 0 ?

Argument, dla którego funkcja przyjmuje wartość 0 , nazywamy **miejszem zerowym** tej funkcji. Inaczej mówiąc, argument x jest miejscem zerowym funkcji f , gdy $f(x) = 0$.

Gdy funkcja jest określona za pomocą wykresu, to zwykle łatwo odczytać jej miejsca zerowe. Są nimi pierwsze współrzędne punktów wykresu leżących na osi x .

Rysunek obok przedstawia wykres pewnej funkcji. Jej miejscami zerowymi są liczby -3 , -1 oraz wszystkie liczby z przedziału $\langle 2; 4 \rangle$.



zadania 10–14

ZESTAW ZADAŃ

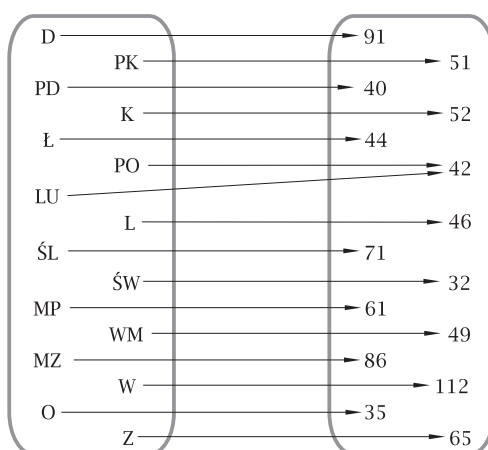
1. Opisane przyporządkowanie to przykład funkcji. Określ jej dziedzinę, podaj kilka argumentów oraz odpowiadające im wartości.
- a) Każdemu słowu w zdaniu: „Nie czyń drugiemu, co tobie niemiłe” przyporządkowano liczbę liter w tym wyrazie.
 - b) Numerowi strony pewnego podręcznika do matematyki została przyporządkowana liczba zadań na tej stronie.
 - c) Uczniowi twojej klasy przyporządkowano liczbę jego rodzeństwa.
 - d) Laureatowi Nagrody Nobla przyporządkowano kraj, w którym się urodził.
 - e) Pierwiastkowi chemicznemu został przyporządkowany jego symbol.
 - f) Szczytowi górskiemu przyporządkowano jego wysokość.



II 2. Dla podanej funkcji wybierz dwa argumenty i podaj odpowiadające im wartości.

- a) $f: \{2, 3, 5, 7, 8\} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to połowa liczby x .
 b) $f: \{5, 6, 7, \dots, 99\} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to 10% liczby x .
 c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to zaokrąglenie liczby x do jedności.
 d) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = \frac{x}{3}$
 e) $f: \langle -2; 3 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) = x + 2$

3. Poniższy graf przedstawia funkcję, która każdemu województwu w Polsce przyporządkowuje liczbę miast znajdujących się na terenie tego województwa (dane z 2016 r.).



Oznaczenia:

- D — dolnośląskie
 K — kujawsko-pomorskie
 L — lubelskie
 LU — lubuskie
 Ł — łódzkie
 MP — małopolskie
 MZ — mazowieckie
 O — opolskie
 PK — podkarpackie
 PD — podlaskie
 PO — pomorskie
 ŚL — śląskie
 ŚW — świętokrzyskie
 WM — warmińsko-mazurskie
 W — wielkopolskie
 Z — zachodniopomorskie

- a) Ile elementów ma dziedzina funkcji?
 b) Jaką najmniejszą, a jaką największą wartość przyjmuje ta funkcja?
 c) Ile jest argumentów, dla których wartości funkcji są mniejsze niż 45?
 d) Dla ilu argumentów funkcja przyjmuje wartości większe niż 50?

4. Poniżej podano dwie funkcje określone za pomocą tabel.

x	-5	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	$2\frac{1}{2}$
$f(x)$	2	-3	-3	$-3\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	0	0

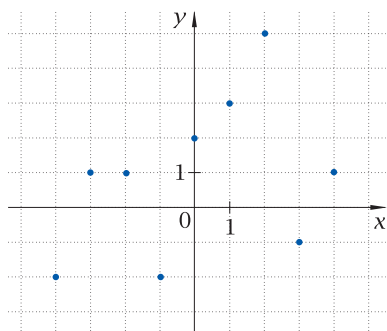
x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2
$g(x)$	2	-2	2	-2	2	-2	2

Dla każdej z nich ustal:

- a) Jaka jest największa, a jaka najmniejsza wartość funkcji?
 b) Jaki jest zbiór wartości funkcji?
 c) Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie?
 d) Ilu argumentom jest przyporządkowana liczba 2?



III 5. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji.



- Określ dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji.
- Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje największą wartość?
- Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne?
- Podaj przykłady argumentów, dla których funkcja przyjmuje tę samą wartość.
- Przedstaw funkcję za pomocą tabeli.

6. Przyporządkujmy każdej liczbie naturalnej od 0 do 9 liczbę liter w słowie ją oznaczającym, np. liczbie 1 (j-e-d-e-n) odpowiada 5. Przedstaw tę funkcję w postaci tabelki i sporządź jej wykres. Której liczbie odpowiada najmniejsza wartość?

7. Poniżej podano przykłady przyporządkowań (liczbom x przyporządkowano liczby y). Które z nich nie są funkcjami?

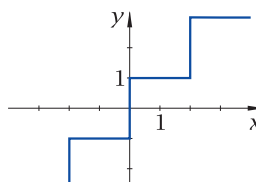
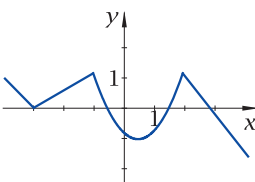
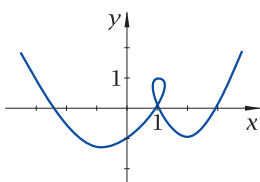
a)

x	-5	-1	0	6
y	-5	3	-5	3

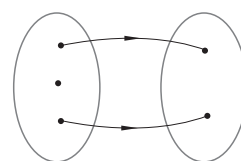
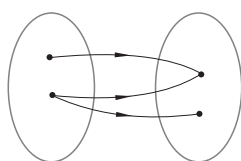
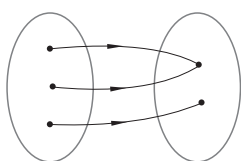
x	-3	-2	-1	-1
y	0	-2	-5	-7

x	-2	0	2	10
y	4	4	4	4

b)



c)



8. Poniżej podano wzór i dziedzinę pewnej funkcji. Przedstaw tę funkcję w postaci tabelki i narysuj jej wykres.

a) $y = \frac{4}{x^2}$

Dziedzina: $\{-2, -1, 1, 2\}$

b) $y = \sqrt{x} - 1$

Dziedzina: $\{0, \frac{1}{4}, 1, 4\}$

9. Sporządź tabelkę i narysuj wykres funkcji, która każdej liczbie ze zbioru $\{-1, \frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}\}$ przyporządkowuje jej odwrotność. Zapisz wzór tej funkcji.



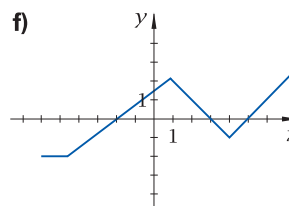
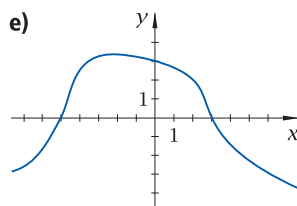
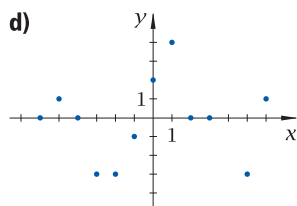
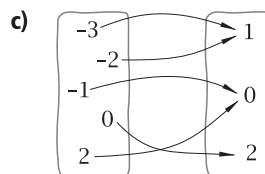
◀ IV 10. Podaj miejsca zerowe, które można odczytać na podstawie podanych informacji o funkcji:

a)

x	-2	-1	0	1	2
y	0	-6	3	-5	3

b)

x	0	1	2	3	4
y	0	1	-1	0	3



11. Przedstaw za pomocą tabelki albo wykresu przykład funkcji, której dziedzina ma sześć elementów i która:

- a) ma dwa miejsca zerowe, b) nie ma miejsc zerowych.

12. Ustal, jakie miejsca zerowe ma podana funkcja, i określ jej zbiór wartości.

- a) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ i $f(n)$ to reszta z dzielenia n przez 7
b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ i $f(n)$ to cyfra jedności liczby $5n$
c) $f: \langle 0; 2 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to zaokrąglenie liczby do jedności
d) $f: (0; 5) \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to cyfra jedności rozwinięcia dziesiętnego liczby x
e) $f: \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\} \rightarrow \mathbb{N}$ i $f(n)$ to liczba parzystych dzielników liczby n

13. Funkcja g została określona następująco: Każdej liczbie naturalnej n przyporządkowujemy największą z liczb parzystych mniejszych lub równych n .

- a) Podaj wartości $g(3)$, $g(5)$, $g(16)$, $g(158)$.
b) Dla jakich argumentów funkcja g przyjmuje wartość 120?
c) Jakie miejsca zerowe ma ta funkcja?
d) Dla ilu argumentów funkcja g przyjmuje wartości mniejsze od 50?

14. Narysuj wykres funkcji spełniającej jednocześnie następujące warunki:

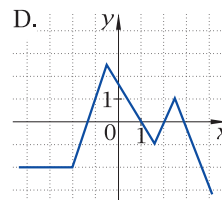
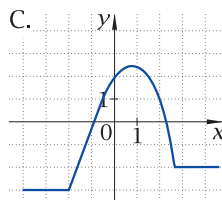
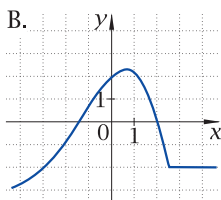
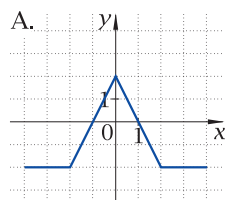
- do wykresu należy punkt $P = (1, 3)$,
- dla argumentu $x = 2$ funkcja przyjmuje wartość 7,
- funkcja przyjmuje wartość 8 dla co najmniej dwóch argumentów,
- funkcja przyjmuje wartość 0 dla argumentu $x = 3$,
- dziedzina funkcji to zbiór liczb całkowitych większych od -4 i mniejszych od 6.



MINISPRAWDZIAN

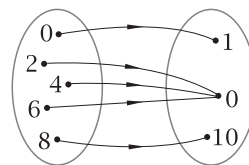
S1. W tabelce podano niektóre argumenty i wartości funkcji f . Na jednym z rysunków przedstawiono fragment wykresu tej funkcji. Na którym?

x	-3	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{10}$
$f(x)$	-2	0	2	-2



S2. Ile miejsc zerowych ma funkcja przedstawiona na grafie obok?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



S3. Funkcja g jest określona następująco:

$g: \{10, 11, 12, \dots, 99, 100\} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n)$ to iloczyn cyfr zapisu dziesiętnego liczby n .

Ile jest argumentów, dla których funkcja g przyjmuje wartość 6?

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10



POJĘCIE FUNKCJI

1. Dla każdej z funkcji określonych poniżej za pomocą tabelki ustal:

- dziedzinę,
- zbiór wartości,
- wartości najmniejszą i największą,
- wartość dla argumentu 1,
- dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 2,
- miejsca zerowe funkcji,
- dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	0	1	2	3	4

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	-2	1	-2	0	2	-1	2

x	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	-3	5	0	1	2	0

x	10	12	14	16	18	20
$s(x)$	0	2	4	6	8	0

2. Poniżej określono funkcje za pomocą opisu słownego. Przedstaw te funkcje za pomocą grafu i tabelki.

- Liczbowi całkowitemu należącemu do przedziału $(-4; 2)$ przyporządkowujemy liczbę o 6 większą.
- Liczbowi dwucyfrowemu podzielnyemu przez 15 przyporządkowujemy sumę cyfr występujących w tej liczbie.

3. Poniżej określono funkcje za pomocą opisu słownego. Przedstaw te funkcje za pomocą tabelki i wykresu.

- Każdej liczbie całkowitej należącej do przedziału $\langle -4; 4 \rangle$ przyporządkowujemy wartość bezwzględną tej liczby.
- Każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ przyporządkowujemy resztę z dzielenia tej liczby przez 4 pomniejszoną o 2.

4. Funkcję określono za pomocą wzoru i podano jej dziedzinę. Przedstaw tę funkcję za pomocą tabelki i wykresu.

- $f(x) = 2x - 5, \quad x \in \left\{-3, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2, 4, 5\frac{1}{4}\right\}$
- $f(x) = \frac{12}{x} - 3, \quad x \in \{-6, -4, -3, -2, 1, 2, 3, 4, 6\}$
- $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9\}$
- $f(x) = \frac{x^2}{2}, \quad x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
- $f(x) = |x + 2| - 2, \quad x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$



5. Poniżej określono słownie następujące funkcje:

- a) funkcja f_1 każdej liczbie dwucyfrowej mniejszej od 50 przyporządkowuje iloczyn cyfr występujących w zapisie tej liczby,
- b) funkcja f_2 każdej liczbie ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ przyporządkowuje resztę z dzielenia tej liczby przez 6,
- c) funkcja f_3 każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje wartość bezwzględną liczby o 3 większej od x ,
- d) funkcja f_4 każdemu argumentowi ze zbioru $\{4, 10, 16, 17, 18, 20\}$ przyporządkowuje liczbę parzystych dzielników tego argumentu.

Dla każdej z tych funkcji:

- I. wyznacz wartości dla argumentów: 16, 18, 20,
- II. sprawdź, czy funkcja przyjmuje wartość 5,
- III. wyznacz miejsca zerowe,
- IV. znajdź zbiór wartości.

6. Znajdź miejsca zerowe funkcji (o ile istnieją), która każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| a) liczbę o 1 większą od x , | e) sześcian liczby x powiększony o 1, |
| b) liczbę dwa razy większą od x , | f) liczbę o 1 większą od $ x $, |
| c) kwadrat liczby x , | g) liczbę o 5 mniejszą od $\sqrt{ x }$, |
| d) odwrotność liczby x , | h) odwrotność liczby $x^2 + 1$. |

7. Pewna funkcja każdej dodatniej liczbie naturalnej przyporządkowuje odwrotność tej liczby.

- a) Jaką wartość przyjmuje ta funkcja dla argumentu 52?
- b) Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość 0,01?
- c) Czy funkcja przyjmuje wartość 1,5?
- d) Dla jednocyfrowych dodatnich liczb naturalnych przedstaw funkcję za pomocą tabelki.
- e) Na podstawie tabeli z punktu d) sporządź wykres funkcji.
- f) Czy istnieje wartość najmniejsza lub największa tej funkcji?
- g) Znajdź zbiór wartości tej funkcji.

8. Funkcja f jest określona następująco:

Każdej liczbie ze zbioru $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ przyporządkowujemy kwadrat tej liczby pomniejszony o 4.

- a) Przedstaw tę funkcję za pomocą tabelki i wykresu.
- b) Podaj miejsca zerowe tej funkcji.
- c) Dla ilu argumentów funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie?
- d) Dla których argumentów funkcja ta przyjmuje wartości mniejsze od -2 ?



9. Funkcja f jest określona następująco:

Każdej liczbie rzeczywistej ujemnej przyporządkowujemy jej odwrotność, a każdej liczbie rzeczywistej nieujemnej — liczbę do niej przeciwną.

- a) Wyznacz miejsce zerowe tej funkcji.
- b) Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.
- c) Oblicz wartość wyrażenia: $f(2) + f(-2)$.
- d) Uzasadnij, że dla $k \neq 0$ iloczyn liczb $f(k)$ oraz $f(-k)$ jest liczbą stałą.

10. Podane przyporządkowanie jest funkcją. Podaj kilka argumentów i odpowiadające im wartości oraz miejsca zerowe (jeśli istnieją).

- a) *Każdemu miastu w Polsce jest przyporządkowane województwo, w którym to miasto leży.*
- b) *Każdemu państwu europejskiemu jest przyporządkowana liczba mórz, które z tym państwem graniczą.*
- c) *Każdemu dniowi bieżącego tygodnia przyporządkowana jest liczba lekcji, które masz tego dnia.*
- d) *Każdemu uczniowi twojej klasy przyporządkowujemy liczbę jego rodzeństwa.*
- e) *Każdej planecie układu słonecznego przyporządkowujemy liczbę jej księżyców.*

11. Dla jakich argumentów opisana funkcja przyjmuje wartość 3, a dla jakich — wartość 4?

- a) *Każdej osobie przyporządkowujemy liczbę liter występujących w jej imieniu.*
- b) *Liczbie naturalnej n przyporządkowujemy liczbę uczniów twojej klasy, których imię ma n liter.*
- c) *Każdej osobie przyporządkowujemy liczbę określającą, ile razy w jej imieniu wystąpiła litera „a”.*
- d) *Każdej liczbie n ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ przyporządkowujemy liczbę uczniów twojej klasy, w których imionach występuje n samogłosek.*

12. Oblicz wartości funkcji dla wskazanych argumentów.

a) $y = 9x - 2$ $f(0), f(-4), f\left(\frac{2}{3}\right)$

b) $y = x\sqrt{2} - 3$ $f(1), f(\sqrt{2}), f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $y = x^2 - 4x + 2$ $f(3), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $y = -3$ $f(2), f(-3), f(\sqrt{2} - 9)$

9e) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{dla } x < 4 \\ 5 - 4x & \text{dla } x \geq 4 \end{cases}$ $f(-1), f(4), f(10)$

9f) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{dla } x \in (-\infty; -1) \\ 2 & \text{dla } x \in \langle -1; 1 \rangle \\ \frac{3}{x} + 4 & \text{dla } x \in \langle 1; +\infty \rangle \end{cases}$ $f(-3), f(-1), f\left(\frac{3}{2}\right)$



13. Poniżej podano cennik opłat za krajowy list zwykły w zależności od tego, ile waży ten list. Przedstaw za pomocą wykresu zależność opłaty za list krajowy od masy listu.

Listy ważące 500 g lub mniej	3,30 zł
Listy ważące więcej niż 500 g, ale nie więcej niż 1000 g	4,00 zł
Listy ważące więcej niż 1000 g, ale nie więcej niż 2000 g	6,60 zł

14. Naskicuj wykres funkcji, która spełnia jednocześnie następujące warunki:

- a) • dziedziną jest przedział $\langle -5; 10 \rangle$,
• do wykresu funkcji należą punkty $(-2, -2)$, $(1, 5)$, $(8, 4)$ i $(9, 4)$,
• funkcja ma dwa miejsca zerowe: -5 i -1 ,
• najmniejszą wartość funkcja przyjmuje dla argumentu -3 ,
• największą wartość, jaką przyjmuje funkcja, wynosi 6 ,
- b) • dziedziną jest przedział $\langle -8; 7 \rangle$,
• wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych,
• największą wartość funkcja przyjmuje dla argumentu -8 ,
• funkcja przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $\langle -8; -3 \rangle$,
• funkcja przyjmuje dla argumentów -8 i 7 wartości, które są liczbami przeciwnymi.

15. Na zbiorze wszystkich słów języka polskiego określamy trzy funkcje l , g oraz s . Jeśli przez x oznaczmy słowo w języku polskim, to $l(x)$ oznacza liczbę liter występujących w słowie x , $g(x)$ — liczbę głosek w tym słowie, $s(x)$ — liczbę sylab, z których składa się to słowo.

- a) Oblicz wartość każdej z tych funkcji dla słowa „rzeżucha”.
- b) Podaj przykład takich słów a , b , c oraz d , że: $l(a) = g(a)$, $s(b) = l(b) - g(b)$, $l(c) = 2 \cdot s(c)$, $l(d) = g(d) = s(d)$.
- c) Uzasadnij, że dla każdego argumentu x spełniona jest nierówność $s(x) \leq l(x)$.

16. Podaj miejsca zerowe funkcji f i g , określonych w następujący sposób:

$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to największa wielokrotność liczby 5 mniejsza od x ,

$g: \mathbb{IQ} \rightarrow \mathbb{Z}$ i $g(x)$ to największa z liczb całkowitych mniejszych od x .

17. Podaj najmniejszą i największą wartość funkcji f .

a) $f: \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to najmniejsza różna od 0 wspólna wielokrotność liczb x i 10 .

b) $f: \langle 0,01; 0,1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x)$ to suma trzech pierwszych cyfr po przecinku występujących w rozwinięciu dziesiętnym liczby x .

c) Funkcja f każdej liczbie naturalnej o sumie cyfr równej 7 przyporządkowuje iloczyn cyfr tej liczby.



18. Dane są funkcje f , g oraz h określone następująco:

- funkcja f każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje największy dzielnik tej liczby różny od n ,
- funkcja g każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje liczbę jej dzielników,
- funkcja h każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje najmniejszą liczbę pierwszą nie mniejszą od n .

a) Czy któraś z tych funkcji ma miejsce zerowe?

b) Wyznacz następujące wartości: $f(f(12))$, $g(g(15))$, $h(h(36))$.

c) Oblicz wartość wyrażenia: $\frac{f(g(24)) + g(f(24))}{g[h(f(24))] - f[h(g(24))]}.$



POJĘCIE FUNKCJI

1. Funkcje f , g i h są określone za pomocą tabel. Uzupełnij zdania.

a)

argumenty funkcji					
x	-3	-1	0	4	7
$f(x)$	0	-3	5	-2	5
wartości funkcji					

Dziedzina funkcji f to $\{-3, -1, 0, \dots\}$.

Zbiór wartości funkcji f to $\{-3, -2, \dots\}$.

Wartość funkcji f dla argumentu $x = -1$ to $y = \dots$.

Funkcja przyjmuje wartość $y = 5$ dla $x = 0$ oraz dla $x = \dots$.

Miejscem zerowym funkcji jest $x = \dots$.

Funkcja f przyjmuje wartości ujemne dla $x = -1$ oraz dla $x = \dots$.

Największa wartość funkcji f jest równa $\dots$.

Najmniejsza wartość funkcji f jest równa $\dots$.

b)

x	-5	-2	-1	0	7
$g(x)$	2	-3	-2	2	0

Dziedzina funkcji g to $\{\dots\}$.

Zbiór wartości funkcji g to $\{\dots\}$.

Wartość funkcji g dla argumentu $x = -1$ to $y = \dots$.

Funkcja przyjmuje wartość $y = 2$ dla $x = \dots$ oraz dla $x = \dots$.

Miejscem zerowym funkcji jest $x = \dots$.

Funkcja g przyjmuje wartości dodatnie dla $x = \dots$ oraz dla $x = \dots$.

Największa wartość funkcji g jest równa $\dots$.

Najmniejsza wartość funkcji g jest równa $\dots$.

c)

x	-9	-7	-4	-1	0
$h(x)$	-3	-5	0	0	-3

Dziedzina funkcji h to $\{\dots\}$.

Zbiór wartości funkcji h to $\{\dots\}$.

Wartość funkcji h dla argumentu $x = 0$ to $y = \dots$.

Funkcja przyjmuje wartość $y = -3$ dla $x = \dots$ oraz dla $x = \dots$.

Miejscami zerowymi funkcji są $x = \dots$ oraz $x = \dots$.

Funkcja h przyjmuje wartości ujemne dla $x = \dots$, $x = \dots$ oraz dla $x = \dots$.

Największa wartość funkcji h jest równa $\dots$.

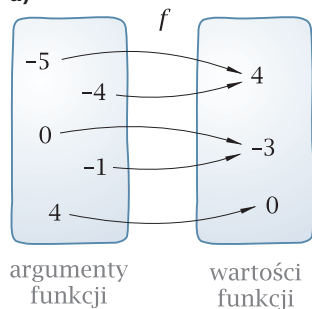
Najmniejsza wartość funkcji h jest równa $\dots$.



POJĘCIE FUNKCJI

2. Funkcje f , g i h są określone za pomocą grafów. Uzupełnij zdania.

a)



Dziedzina funkcji f to $\{-5, -4, -1, \dots\}$.

Zbiór wartości funkcji f to $\{-3, 0, \dots\}$.

Wartość funkcji f dla $x = -5$ to $y = \dots$.

Funkcja przyjmuje wartość $y = -3$ dla $x = \dots$ oraz dla $x = \dots$.

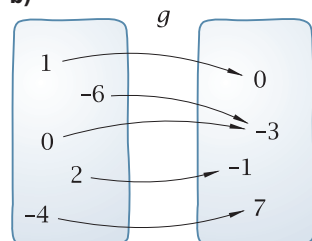
Miejscem zerowym funkcji jest $x = \dots$.

Funkcja f przyjmuje wartość ujemną dla $x = -1$ oraz dla $x = \dots$.

Największa wartość funkcji f jest równa $\dots$.

Najmniejsza wartość funkcji f jest równa $\dots$.

b)



Dziedzina funkcji g to $\{\dots\}$.

Zbiór wartości funkcji g to $\{\dots\}$.

Wartość funkcji g dla $x = 2$ to $y = \dots$.

Funkcja przyjmuje wartość $y = -3$ dla $x = \dots$ oraz dla $x = \dots$.

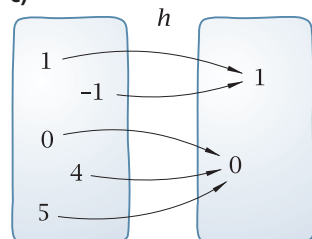
Miejscem zerowym funkcji jest $x = \dots$.

Funkcja g przyjmuje wartości nieujemne dla $x = \dots$ oraz dla $x = \dots$.

Największa wartość funkcji g to $\dots$.

Najmniejsza wartość funkcji g to $\dots$.

c)



Dziedzina funkcji h to $\{\dots\}$.

Zbiór wartości funkcji h to $\{\dots\}$.

Wartość funkcji h dla $x = 4$ to $y = \dots$.

Funkcja przyjmuje wartość $y = 1$ dla $x = \dots$ oraz dla $x = \dots$.

Miejscami zerowymi funkcji są $x = \dots$, $x = \dots$ oraz $x = \dots$.

Funkcja h przyjmuje wartości niedodatnie dla $x = \dots$, $x = \dots$ oraz dla $x = \dots$.

Największa wartość funkcji h to $\dots$.

Najmniejsza wartość funkcji h to $\dots$.

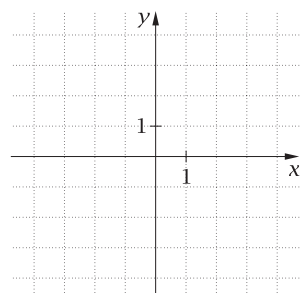
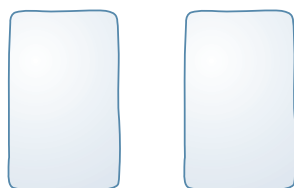


POJĘCIE FUNKCJI

3. Każda z poniższych funkcji jest określona na jeden ze sposobów: za pomocą tabelki, grafu lub wykresu. Przedstaw ją na pozostałe dwa sposoby.

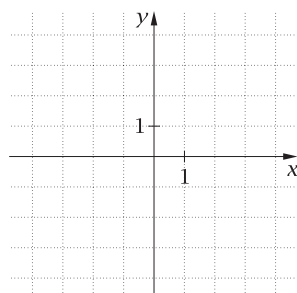
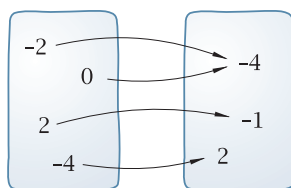
a) funkcja f

x	-3	0	2	4
$f(x)$	-2	3	-2	3



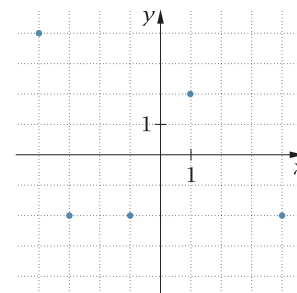
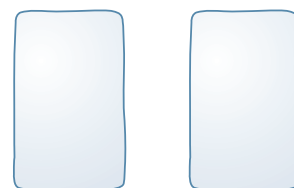
b) funkcja g

x				
$g(x)$				

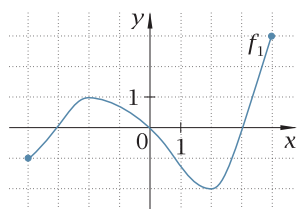


c) funkcja h

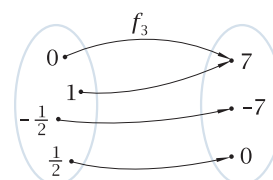
x					
$h(x)$					



4. Poniżej przedstawione są trzy różne funkcje. Uzupełnij tabelkę.



x	0	-1	2	-2
$f_2(x)$	-1	0	-2	0

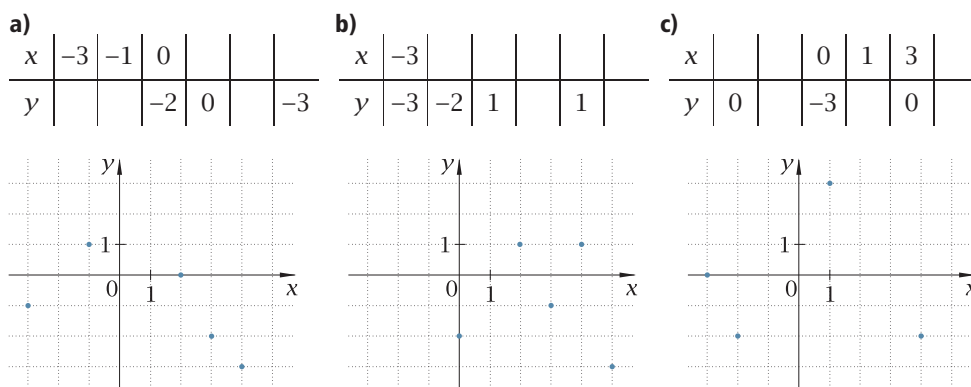


Funkcja	f_1	f_2	f_3
Dziedzina funkcji			
Zbiór wartości funkcji			
Najmniejsza wartość funkcji			
Największa wartość funkcji			
Miejsca zerowe funkcji			
Wartość funkcji dla argumentu równego 0			



POJĘCIE FUNKCJI

5. Uzupełnij rysunek i tabelkę tak, aby przedstawiały tę samą funkcję.



6. Uzupełnij współrzędne punktów tak, aby były one punktami należącymi do wykresu funkcji f .

a) Funkcja f każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje cyfrę jedności liczby 9^n .

(0,) (1,) (2,) (35,) (102,)

b) Funkcja f każdej dodatniej liczbie naturalnej n przyporządkowuje n -tą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby $\frac{7}{111}$.

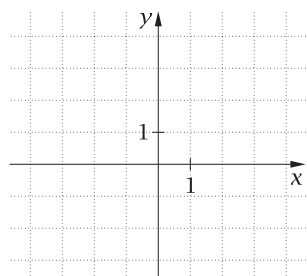
(1,) (2,) (3,) (4,) (11,) (26,)

c) Funkcja f każdej liczbie wymiernej przyporządkowuje liczbę 1, a każdej liczbie niewymiernej — liczbę 0.

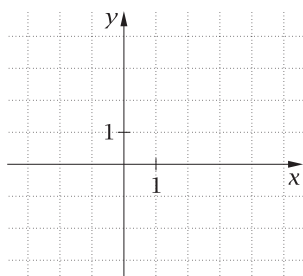
(-5,) (0,) ($\sqrt{2}$,) ($2\sqrt{9}$,) ($-\pi$,)

7. Narysuj wykres funkcji, która spełnia podane warunki.

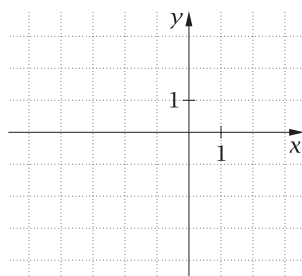
a) Dziedziną funkcji jest zbiór $\{-4, -3, 0, 1, 2, 4\}$, a zbiorem wartości $\{-3, 0, 2\}$, funkcja ma trzy miejsca zerowe.



b) Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -3; 5 \rangle$, a zbiorem wartości $\{-3, 2\}$, funkcja przyjmuje ujemną wartość tylko dla $x \in \langle 0; 2 \rangle$.



c) Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -5; 2 \rangle$, a zbiorem wartości $\langle -4; 3 \rangle$, funkcja przyjmuje wartość -2 dla dwóch argumentów.





MATERIAŁY DO LEKCJI POŚWIĘCONYCH CZYTANIU WYKRESÓW

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

zadanie 7–10 ► — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii

◄ ||| — odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem |||

● — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)

● — zadanie trudne

W zbiorze zadań przyjęto następujące oznaczenia:

12. — zadanie łatwe

12. — zadanie o średnim poziomie trudności

12. — zadanie trudne

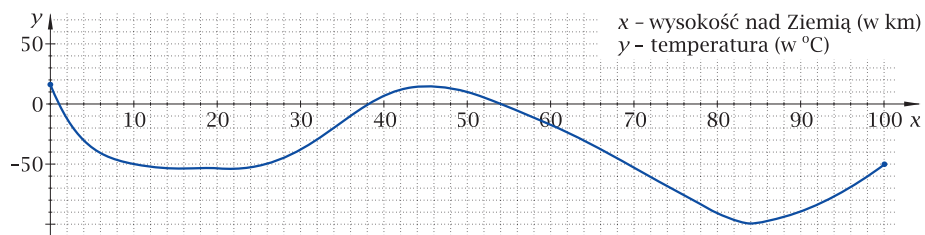
Я — zadanie z zakresu rozszerzonego



CZYTANIE WYKRESÓW

- I Za pomocą funkcji opisujemy zwykle, w jaki sposób zmienia się jedna wielkość w zależności od drugiej. Najłatwiej obserwować tę zależność na podstawie wykresu.

Funkcja, którą przedstawiono poniżej, opisuje, jak zmienia się temperatura w zależności od wysokości nad powierzchnią Ziemi (do 100 km).



ĆWICZENIE A Odczytaj z wykresu:

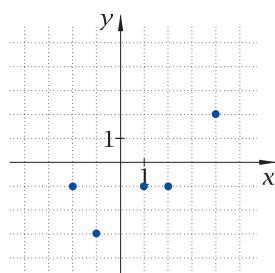
- Na jakiej wysokości temperatura jest najniższa?
- Na jakich wysokościach panują temperatury dodatnie?



Czasami argumenty i wartości funkcji nazywa się zmiennymi: argument funkcji — **zmienną niezależną**, a wartość funkcji — **zmienną zależną**.

W przykładzie na poprzedniej stronie zmienną niezależną jest wysokość nad powierzchnią Ziemi, a zmienną zależną — temperatura.

Poniżej zostały przedstawione wykresy trzech funkcji. Na ich podstawie możemy określić dziedzinę oraz zbiór wartości funkcji. Przyjmujemy, że punkty oznaczone pustym kółeczkiem nie należą do wykresu funkcji.

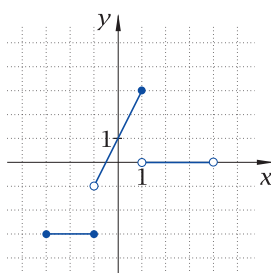


Dziedzina:

$$\{-2, -1, 1, 2, 4\}$$

Zbiór wartości:

$$\{-3, -1, 2\}$$

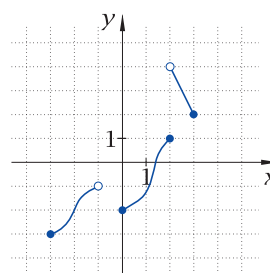


Dziedzina:

$$\langle -3; 4 \rangle$$

Zbiór wartości:

$$\{-3\} \cup (-1; 3)$$



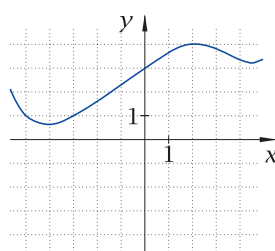
Dziedzina:

$$\langle -3; -1 \rangle \cup \langle 0; 3 \rangle$$

Zbiór wartości:

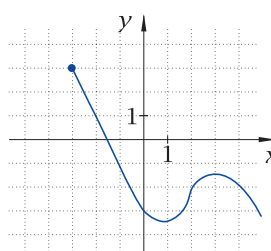
$$\langle -3; 1 \rangle \cup \langle 2; 4 \rangle$$

Na kolejnych rysunkach przedstawiono fragmenty wykresów trzech funkcji. Jeżeli wykres nie kończy się kropką z lewej lub prawej strony, to przyjmujemy, że dziedziną jest przedział nieograniczony. W przypadkach takich jak poniższe będziemy też przyjmować, że widoczne są wszystkie miejsca zerowe, a niewidoczna część wykresu jest nieprzerywaną linią.



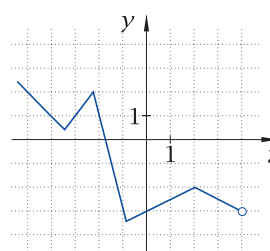
Dziedzina:

$$\text{zbiór } \mathbb{R}$$



Dziedzina:

$$\langle -3; +\infty \rangle$$



Dziedzina:

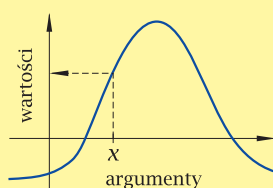
$$(-\infty; 4)$$

Rysunki te przedstawiają tylko fragmenty wykresów, więc na ich podstawie nie możemy określić, jakie są zbiory wartości poszczególnych funkcji, bo nie mamy pewności, jak dalej przebiegają wykresy.

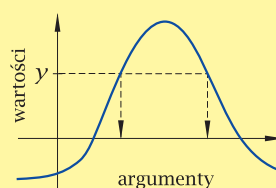


ĆWICZENIE B Wybierz jedną z funkcji przedstawionych na poprzedniej stronie i odpowiedz na pytania:

- Jaką wartość przyjmuje funkcja dla argumentu 0, a jaką — dla argumentu 2?
- Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 1?

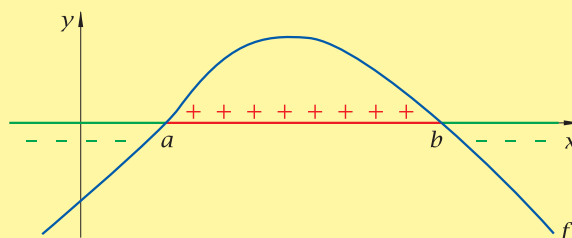


Tak znajdujemy wartość funkcji dla danego argumentu x .



A tak: argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość y .

Gdy znamy miejsca zerowe i korzystamy z wykresu, możemy określić, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich — ujemne.



$$f(x) > 0 \text{ dla } x \in (a; b)$$

$$f(x) < 0 \text{ dla } x \in (-\infty; a) \cup (b; +\infty)$$

ĆWICZENIE C Narysuj wykres funkcji, której miejscami zerowymi są liczby 1, 2 i 3 oraz spełniony jest podany warunek.

- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x \in (1; 2) \cup (3; +\infty)$.
- Funkcja przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (-\infty; 1)$.
- Funkcja nie przyjmuje wartości dodatnich.



PRZYKŁAD Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Określ dziedzinę i zbiór wartości tej funkcji, największą wartość i najmniejszą wartość oraz miejsca zerowe. Dla jakich argumentów wartości funkcji są ujemne?

Dziedziną jest przedział $\langle -3; 7 \rangle$.

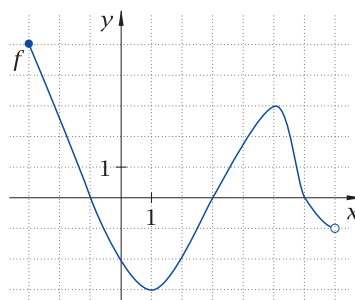
Zbiór wartości to przedział $\langle -3; 5 \rangle$.

Wartość największa to $f(-3) = 5$.

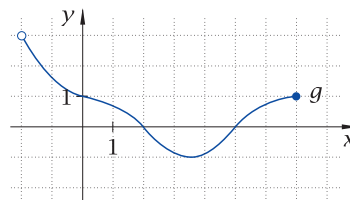
Wartość najmniejsza to $f(1) = -3$.

Miejsca zerowe to liczby: $-1, 3, 6$.

Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla $x \in (-1; 3) \cup (6; 7)$.



ZADANIE Określ dziedzinę i zbiór wartości funkcji g przedstawionej na wykresie obok oraz podaj, dla jakich argumentów wartości tej funkcji są dodatnie.

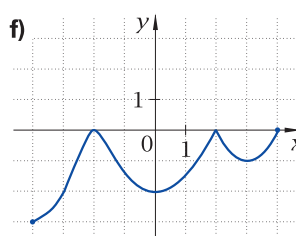
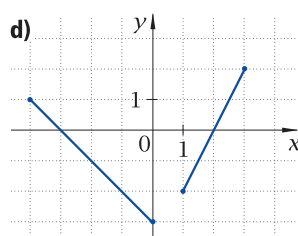
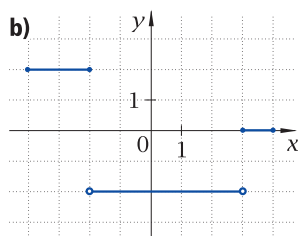
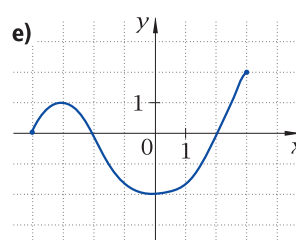
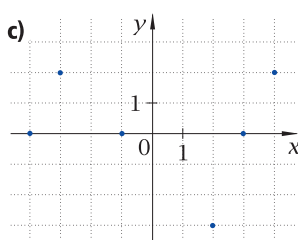
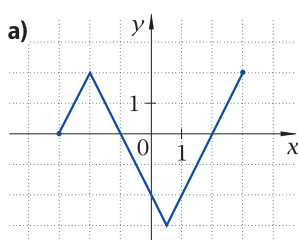


zadania 1–12 ►

ZESTAW ZADAŃ

◀ I 1. Korzystając z wykresu funkcji, odpowiedz na pytania:

- Jaka jest dziedzina funkcji? Jaki jest zbiór wartości funkcji?
- Jaką najmniejszą i jaką największą wartość przyjmuje funkcja?
- Jakie współrzędne ma punkt przecięcia wykresu z osią y ?
- Czy funkcja ma miejsca zerowe? Jeśli tak, to jakie?
- Dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie?





2. Która z funkcji przedstawionych w zadaniu 1. na poprzedniej stronie spełnia jednocześnie poniższe warunki?

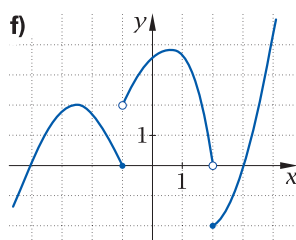
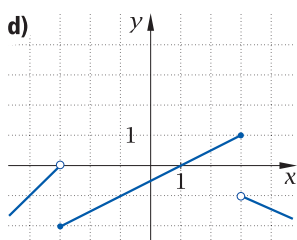
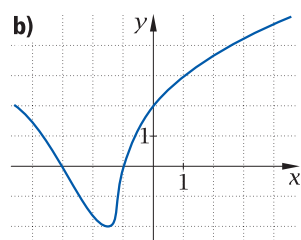
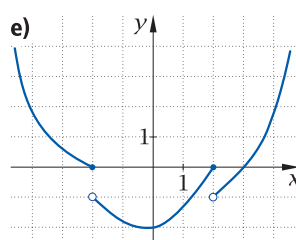
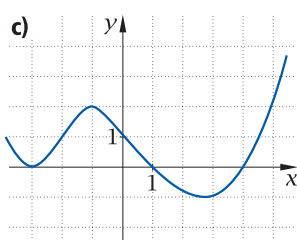
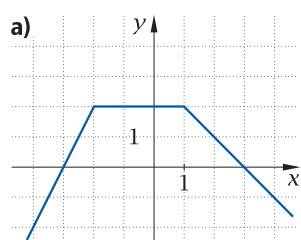
- Funkcja ma dokładnie trzy miejsca zerowe.
- Dla argumentów z przedziału $(-2; 2)$ funkcja przyjmuje wartości ujemne.
- Najmniejsza wartość funkcji wynosi -2 .

3. a) Narysuj wykres dowolnej funkcji, której dziedziną jest przedział $\langle -5; 5 \rangle$ i która ma dwa miejsca zerowe.

b) Narysuj wykres funkcji, której dziedziną jest zbiór $\langle -4; 6 \rangle$ i która przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów większych od -3 i jednocześnie mniejszych od 2 .

c) Narysuj wykres funkcji, której dziedziną jest zbiór $(-5; 3)$ i która przyjmuje wartość 0 dla argumentów mniejszych od 1 , a dla pozostałych — wartość 2 .

4. Odczytaj miejsca zerowe funkcji przedstawionej za pomocą wykresu. Określ, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich — ujemne.



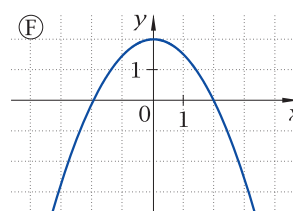
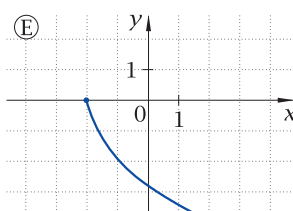
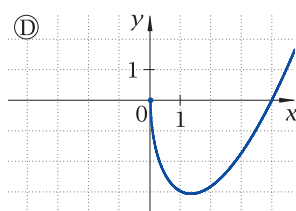
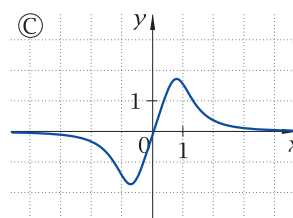
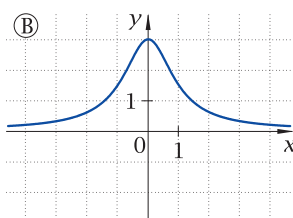
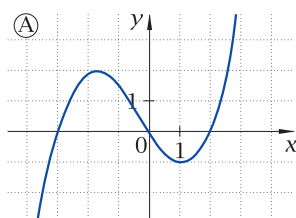
5. Naszkicuj taki fragment wykresu funkcji określonej na zbiorze $\mathbb{R}$, z którego widać, że funkcja może spełniać podany warunek.

- a)** Funkcja nie ma miejsc zerowych.
- b)** Funkcja przyjmuje tylko wartości ujemne.
- c)** Funkcja liczbom dodatnim przyporządkowuje wartość 1 , liczbom ujemnym przyporządkowuje wartość -1 , a liczbie 0 — wartość 0 .
- d)** Funkcja dla argumentów mniejszych od 4 przyjmuje wartości ujemne, a dla pozostałych argumentów — wartość 3 .



6. Na rysunkach przedstawiono wykresy sześciu różnych funkcji.

- Dla których z tych funkcji dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych?
- Jedna z tych funkcji przyjmuje tylko wartości dodatnie. Która?
- Dwie z tych funkcji mają jedno miejsce zerowe. Które to funkcje?
- Zbiorem wartości jednej z tych funkcji jest przedział $(-\infty; 0)$. Która to funkcja?

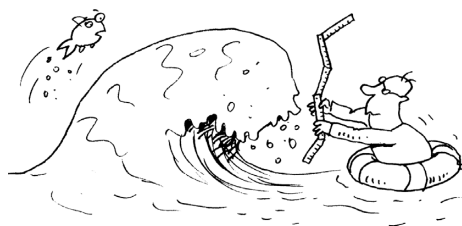


7. Która z funkcji z zadania 6 spełnia jednocześnie poniższe warunki?

- Punkt $(0,0)$ należy do wykresu funkcji.
- Dla argumentu 1 wartość funkcji jest ujemna.
- Funkcja nie przyjmuje wartości mniejszych od -3 .

Wysokość fali (m)	Stopień skali Beauforta	Wysokość fali (m)	Stopień skali Beauforta
0	0	$(4;6]$	7
$(0;0,1]$	1	$(6;8]$	8
$(0,1;0,5]$	2	$(8;10]$	9
$(0,5;1]$	3	$(10;12]$	10
$(1;2]$	4	$(12;14]$	11
$(2;3]$	5	$(14;+\infty)$	12
$(3;4]$	6		

8. Korzystając z informacji przedstawionych w tabeli, narysuj wykres funkcji, która wysokości fali na morzu przyporządkowuje stopień w skali Beauforta (czyt. Boforta).



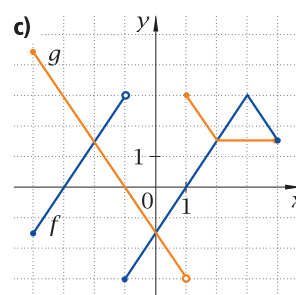
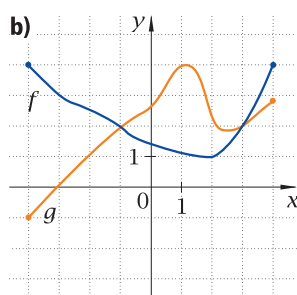
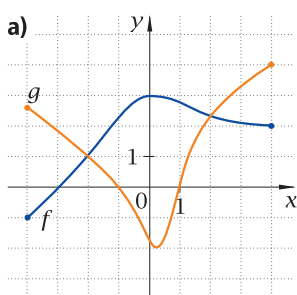
9. Funkcja jest określona następująco: Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowujemy największą z liczb całkowitych nie większych od tej liczby.

Wypisz kilka punktów należących do wykresu tej funkcji. Naskicuj jej wykres.



10. Na podstawie wykresów funkcji f i g odpowiedz na pytania:

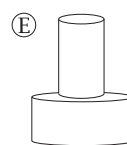
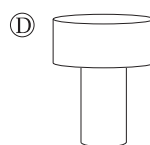
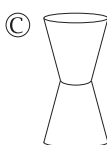
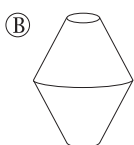
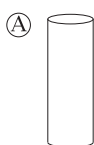
- Jaka jest dziedzina funkcji f , a jaka — funkcji g ?
- Jaki jest zbiór wartości funkcji f , a jaki — funkcji g ?
- Ile miejsc zerowych ma funkcja f , a ile — funkcja g ?
- Dla jakich argumentów wartości funkcji g są dodatnie, a dla jakich argumentów dodatnie są wartości funkcji f ?
- Która z funkcji ma większą wartość dla $x = 1$, a która — dla $x = -3$?
- Dla jakich argumentów wartości funkcji f i g są równe, a dla jakich argumentów wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g ?



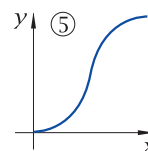
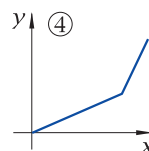
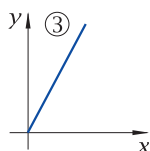
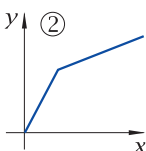
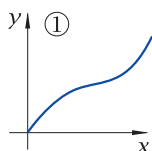
11. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy dwóch funkcji f i g określonych na zbiorze liczb rzeczywistych tak, aby:

- a) wartości funkcji g były mniejsze od wartości funkcji f tylko dla $x \in (-3; 7)$,
- b) wartości funkcji g były większe od wartości funkcji f tylko dla $x \in (-\infty; -4)$ oraz dla $x \in (3; 5)$.

12. Wyobraź sobie, że do naczyń, których kształt zilustrowano na rysunkach, wlewamy jednakowym strumieniem wodę.



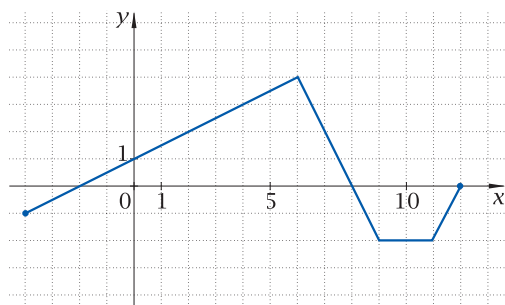
Wykresy przedstawiają, jak zmienia się poziom wody w naczyniach w czasie ich napełniania. Dopasuj wykresy do naczyń.





MINISPRAWDZIAN

Rysunek do zadań S1–S2.



S1. Które zdanie jest prawdziwe?

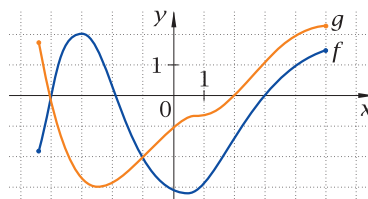
- A. Największą wartość funkcja przyjmuje dla argumentu 12.
- B. Funkcja przyjmuje wartość -2 dokładnie dla trzech argumentów.
- C. Wartość funkcji dla argumentu 3 jest większa niż dla argumentu 7.
- D. Różnica między największą a najmniejszą wartością funkcji jest równa 5.

S2. Które zdanie jest fałszywe?

- A. Dziedziną funkcji jest zbiór liczb spełniających warunek $-4 \leq x \leq 12$.
- B. Funkcja przyjmuje wartość $2,5$ dla dwóch argumentów.
- C. Miejscami zerowymi funkcji są liczby -2 , 8 i 12 .
- D. Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla argumentów mniejszych od 0 .

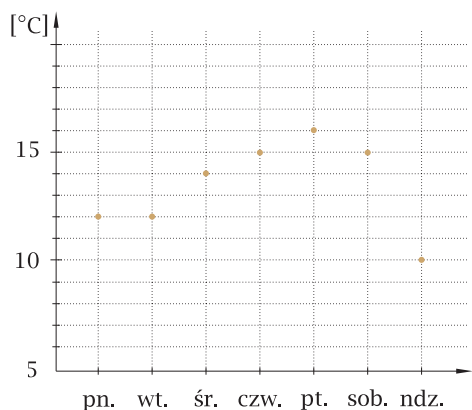
S3. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f oraz g . Wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g dla argumentów należących do przedziału:

- A. $(-4; 5)$ B. $(-3; 2)$ C. $(-4; -1)$ D. $(-1; 5)$





CZYTANIE WYKRESÓW

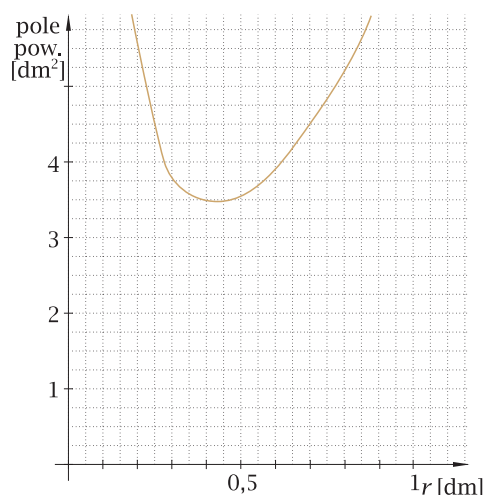


19. Na wykresie obok przedstawiono temperatury zanotowane w południe w kolejnych dniach.

- Jaka była temperatura w czwartek?
- W których dniach temperatura w południe wynosiła 12°C ?
- Którego dnia temperatura była najwyższa? Ile wynosiła?
- Którego dnia temperatura była najniższa? Ile wynosiła?
- O ile stopni niższa była temperatura w środę niż w piątek?

20. Wykres przedstawia zależność między polem powierzchni całkowitej a promieniem podstawy puszki o objętości 0,5 litra. Korzystając z wykresu, odpowiedz na poniższe pytania (odpowiedzi podaj w przybliżeniu).

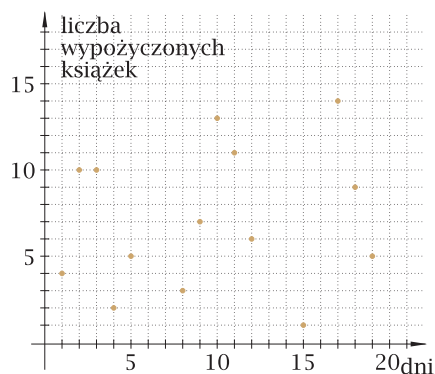
- Jaki jest promień podstawy puszki, o polu powierzchni całkowitej $4,5 \text{ dm}^2$?
- Jakie jest najmniejsze możliwe pole powierzchni puszki? Jaki jest wówczas promień podstawy puszki?
- Dla jakich długości promienia pole powierzchni puszki maleje wraz ze wzrostem promienia, a dla jakich — rośnie?





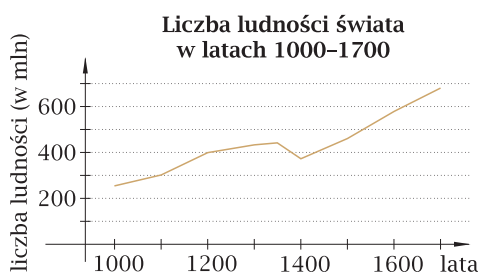
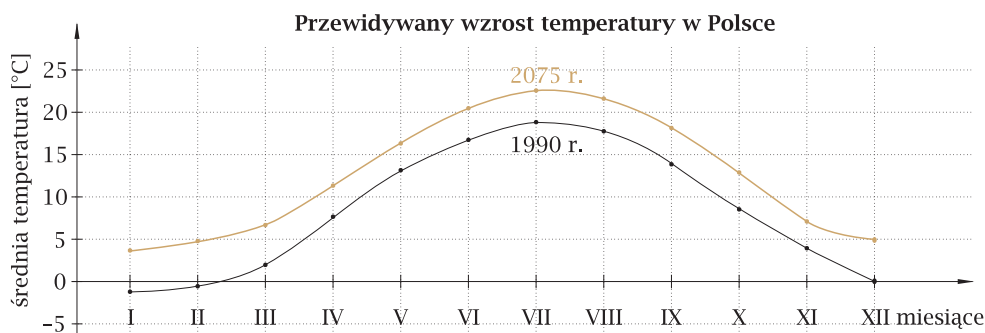
21. Na wykresie przedstawiono liczbę książek wypożyczonych w bibliotece szkolnej (czynnej od poniedziałku do piątku) w dwudziestu kolejnych dniach września przez uczniów klas pierwszych.

- Ile książek wypożyczyli pierwszoklasiści w pięciu początkowych dniach września?
- W którym dniu pierwszoklasiści wypożyczyli największą liczbę książek? Ile to było książek?
- O ile więcej książek wypożyczono 10 września w porównaniu z 1 września?
- Z uwagi na nieobecność bibliotekarza pewnego roboczego dnia biblioteka była zamknięta. Którego dnia bibliotekarz był nieobecny?



22. Odpowiedz na pytania na podstawie wykresów.

- Jaka była średnia temperatura kwietnia 1990 r.?
- W jakich miesiącach 1990 r. średnia temperatura była ujemna?
- W jakich miesiącach 2075 r. przewiduje się średnią temperaturę powyżej 15°C ?
- O ile stopni wzrośnie średnia temperatura marca w latach 1990–2075?
- Czy wzrost średniej temperatury między 1990 r. a 2075 r. będzie większy w lecie czy w zimie?
- Okres wegetacyjny to okres, w którym średnia temperatura miesięczna jest wyższa od 5°C . O ile miesięcy dłuższy będzie okres wegetacyjny w Polsce w 2075 r. w porównaniu z rokiem 1990?



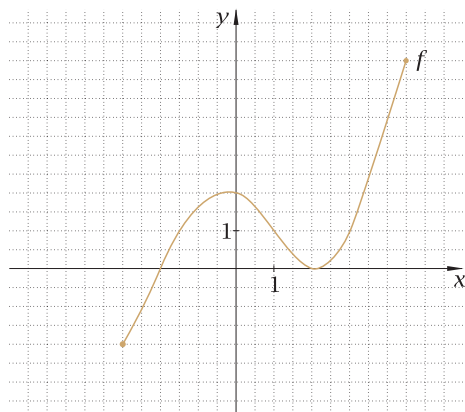
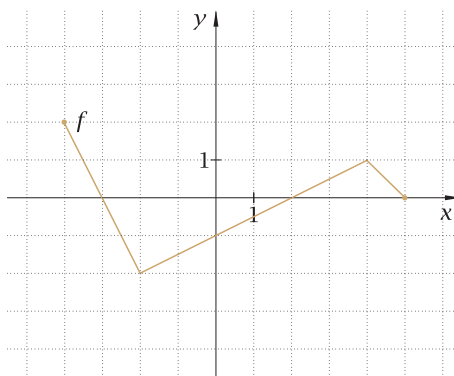
23. Odpowiedz na pytania.

- O ile wzrosła liczba ludności między 1100 r. a 1200 r.?
- W którym wieku liczba ludności przekroczyła 500 mln?
- Na wykresie widać skutki epidemii dżumy zwanej czarną śmiercią. W którym wieku panowała ta epidemia?



24. Odczytaj z wykresu funkcji f :

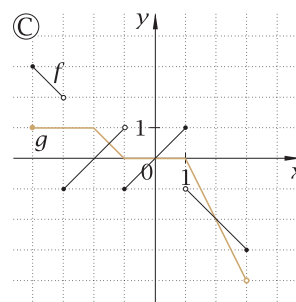
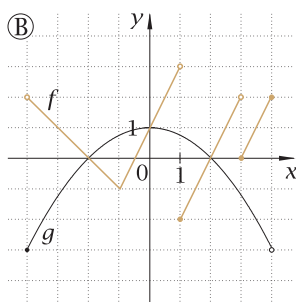
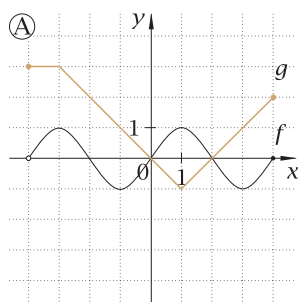
- a) dziedzinę i zbiór wartości funkcji,
- b) wartości $f(-4)$, $f(0)$ i $f(5)$,
- c) dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartość 1, a dla jakich wartość -1 ,
- d) dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne, a dla jakich — nieujemne,
- e) największą i najmniejszą wartość funkcji,
- f) miejsca zerowe funkcji.



25. Odczytaj z wykresu funkcji f :

- a) wartości funkcji f dla argumentów: -3 , -1 , 0 i $3,5$,
- b) miejsca zerowe funkcji f ,
- c) w jakim przedziale funkcja f przyjmuje wartości nieujemne,
- d) dla jakich argumentów przyjmuje wartości większe od 1,
- e) jaka jest najmniejsza, a jaka największa wartość funkcji w przedziale $\langle -1; 4,5 \rangle$,
- f) dla ilu argumentów funkcja przyjmuje wartość 2.

26. Na rysunkach przedstawiono wykresy funkcji f oraz g .

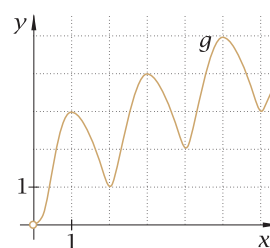


- a) Dla jakich argumentów wartości funkcji przedstawionych na wykresach spełniają nierówność $f(x) > g(x)$?
- b) Dla jakich argumentów zachodzi równość $f(x) = g(x)$?
- c) Dla jakich argumentów wartości funkcji f są mniejsze od wartości funkcji g lub są im równe?
- d) Dla jakich argumentów funkcje f i g przyjmują jednocześnie wartości ujemne?
- e) Dla jakich argumentów wartości obu funkcji są jednocześnie mniejsze od 2?



27. Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji g (dalsza jego część powstałaby według tej samej reguły).

- a) Jakich wartości funkcji można się spodziewać dla argumentów 100, 101, 153?
- b) Ile rozwiązań może mieć równanie $g(x) = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$? Ile rozwiązań ma równanie $g(x) = 115$?





CZYTANIE WYKRESÓW

1. Funkcja f jest określona za pomocą wykresu. Uzupełnij zdania.

Dziedzina funkcji f to $\{-6, -5, \dots\}$.

Zbiór wartości funkcji f to $\{-4, -3, -2, \dots\}$.

Wartość funkcji f dla $x = -5$ to $y = \dots$.

Funkcja f przyjmuje wartość $y = 0$ dla $x = \dots$,

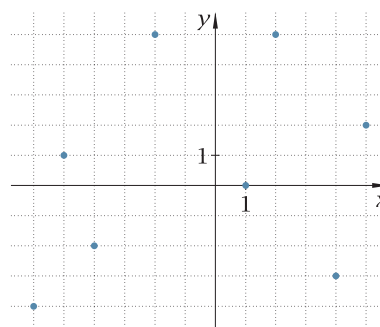
a wartość $y = 5$ dla $x = \dots$ oraz dla $x = \dots$.

Funkcja f przyjmuje wartości ujemne dla

$x = -6$, $x = \dots$ oraz dla $x = \dots$.

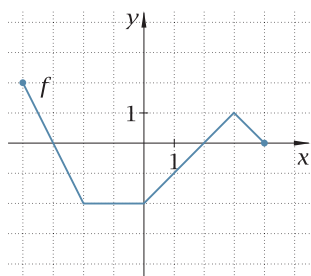
Największa wartość funkcji f to $\dots$,

a najmniejsza wartość funkcji f to $\dots$.



2. Funkcje f i g są określone za pomocą wykresów. Uzupełnij zdania.

a)



Dziedziną funkcji f jest przedział $\dots$.

Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $\dots$.

Wartość funkcji f dla argumentu $x = 3$ jest równa $\dots$.

Funkcja f przyjmuje wartość $y = -2$ dla $x \in \dots$.

Miejscami zerowymi funkcji f są $\dots$.

Największa wartość funkcji f jest równa $\dots$.

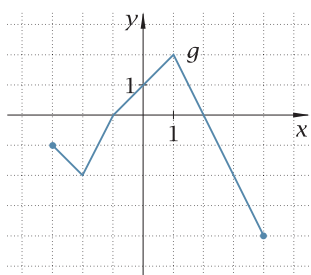
Najmniejsza wartość funkcji f jest równa $\dots$.

Funkcja f przyjmuje wartości ujemne dla $x \in \dots$.

Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in \dots \cup \dots$.

Funkcja f przyjmuje wartości większe od 1 dla $x \in \dots$.

b)



Dziedziną funkcji g jest przedział $\dots$.

Zbiorem wartości funkcji g jest przedział $\dots$.

Wartość funkcji g dla argumentu $x = 3$ jest równa $\dots$.

Funkcja g przyjmuje wartość $y = -2$ dla $x \in \dots$.

Miejscami zerowymi funkcji g są $\dots$.

Największa wartość funkcji g jest równa $\dots$.

Najmniejsza wartość funkcji g jest równa $\dots$.

Funkcja g przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in \dots$.

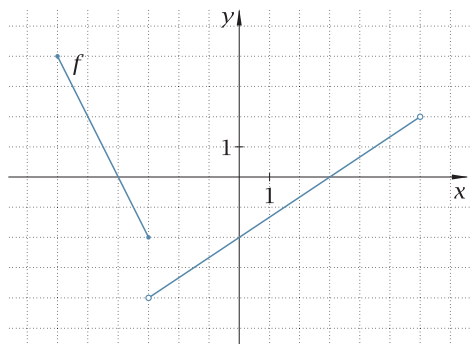
Funkcja g przyjmuje wartości ujemne dla $x \in \dots \cup \dots$.

Funkcja g przyjmuje wartości większe od 1 dla $x \in \dots$.

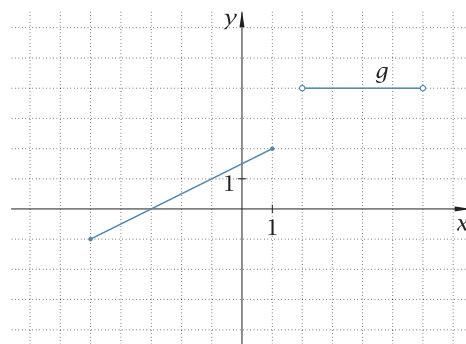


CZYTANIE WYKRESÓW

3. Funkcje f i g są określone za pomocą wykresów. Uzupełnij zdania.

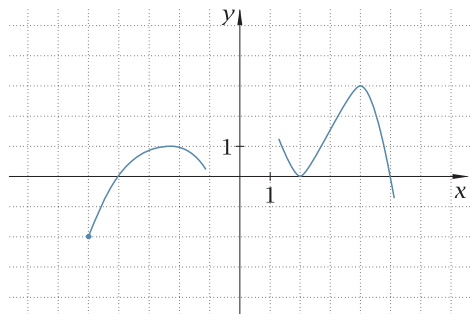


Dziedziną funkcji f jest
Zbiorem wartości funkcji f jest
Wartość funkcji f dla argumentu $x = -3$ jest równa
Funkcja f przyjmuje wartość $y = -2$ dla
Miejscami zerowymi funkcji f są
Największa wartość funkcji f jest równa
Funkcja f przyjmuje wartości ujemne dla $x \in$
Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in$
Funkcja f przyjmuje wartości większe od 2 dla $x \in$



Dziedziną funkcji g jest
Zbiorem wartości funkcji g jest
Wartość funkcji g dla argumentu $x = -3$ jest równa
Funkcja g przyjmuje wartość $y = 4$ dla
Miejscem zerowym funkcji g jest
Największa wartość funkcji g jest równa
Funkcja g przyjmuje wartości ujemne dla $x \in$
Funkcja g przyjmuje wartości dodatnie dla $x \in$
Funkcja g przyjmuje wartości większe od 2 dla $x \in$

4. Uzupełnij wykres oraz podane obok zdania tak, aby dotyczyły tej samej funkcji.

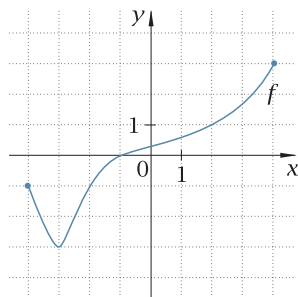


Liczbie 1 funkcja przyporządkowuje wartość 2, a liczbie 0 — wartość -1.
Miejscami zerowymi tej funkcji są cztery liczby: -1,,,
Dziedziną funkcji jest zbiór $\langle -5; 0 \rangle \cup \langle 1; 6 \rangle$.
Najmniejszą wartość funkcja przyjmuje dla argumentu -5, a największą — dla argumentu 4.

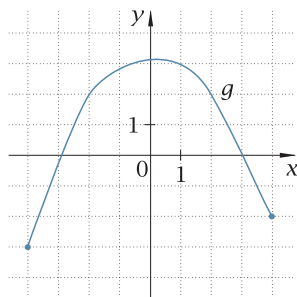


CZYTANIE WYKRESÓW

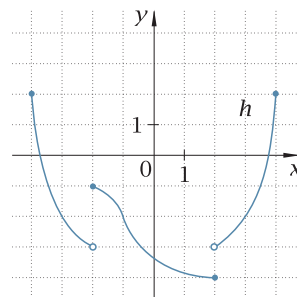
5. Na każdym z poniższych rysunków zaznacz na osi y zbiór wszystkich wartości, które są przyjmowane dla argumentów $x \in \langle -2; 4 \rangle$, a na osi x zaznacz zbiór argumentów, dla których spełniony jest podany warunek.



$$f(x) > 0$$

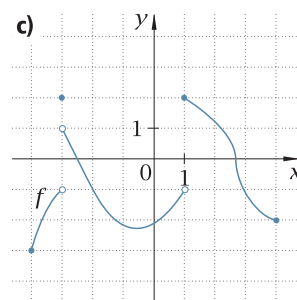
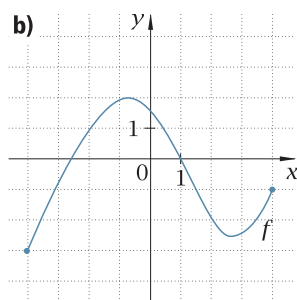
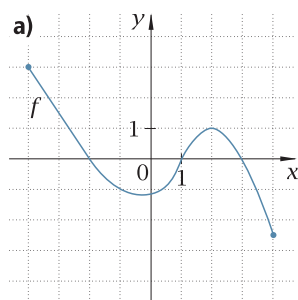


$$g(x) < 2$$

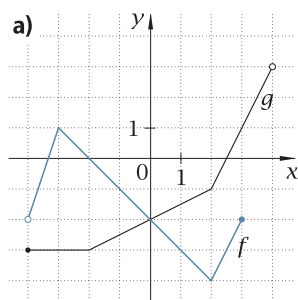


$$h(x) \geq -2$$

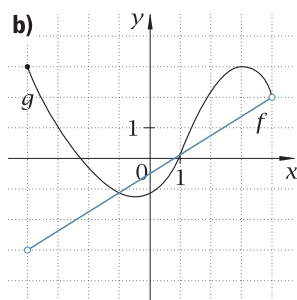
6. Dorysuj wykres takiej funkcji g , która ma dwa miejsca zerowe i przyjmuje wartości większe od wartości funkcji f tylko dla argumentów $x \in (-3; 2)$.



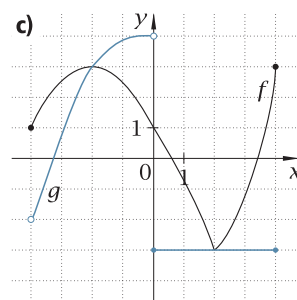
7. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f i g . Na jego podstawie podaj argumenty, dla których wartości funkcji f i g spełniają podane warunki.



$$f(x) = g(x) \text{ dla } x = \dots\dots\dots$$
$$f(x) > g(x) \text{ dla } x \in \dots\dots\dots$$



$$f(x) = g(x) \text{ dla } x \in \{ \dots\dots\dots \}$$
$$f(x) \geq g(x) \text{ dla } x \dots\dots\dots$$



$$f(x) = g(x) \text{ dla } x \in \{ \dots\dots\dots \}$$
$$f(x) \leq g(x) \text{ dla } x \dots\dots\dots$$



MATERIAŁY DO LEKCJI POŚWIĘCONYCH MONOTONICZNOŚCI FUNKCJI

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

- zadanie 7–10 ► — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii
- ◄ ||| — odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem |||
- — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)
 - — zadanie trudne

W zbiorze zadań przyjęto następujące oznaczenia:

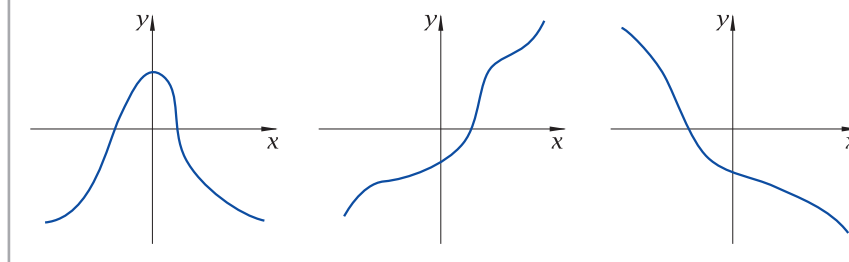
- 12. — zadanie łatwe
- 12. — zadanie o średnim poziomie trudności
- 12. — zadanie trudne
- Я — zadanie z zakresu rozszerzonego



MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI

ĆWICZENIE A Jeden z wykresów przedstawia funkcję f spełniającą poniższy warunek. Który to wykres?

$$f(-3) < f(-1,5) < f(0) < f\left(1\frac{1}{7}\right) < f(2,55)$$

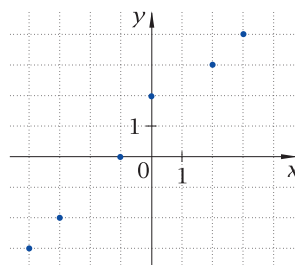
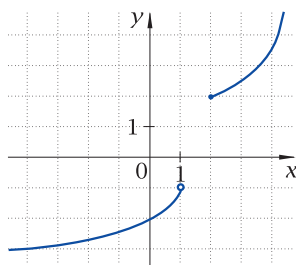
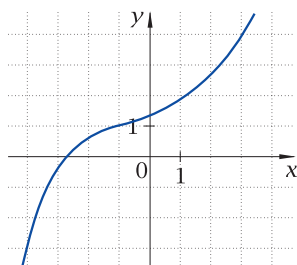


142

FUNKCJE



Poniżej przedstawiono fragmenty wykresów funkcji, które wraz ze wzrostem argumentów przyjmują coraz większe wartości. O takich funkcjach mówimy, że są rosnące.



ĆWICZENIE B Dla każdej z funkcji przedstawionych na wykresach powyżej wybierz takie dwa argumenty x_1 i x_2 , że $x_1 < x_2$. Ustal, dla którego z tych argumentów funkcja przyjmuje większą wartość.

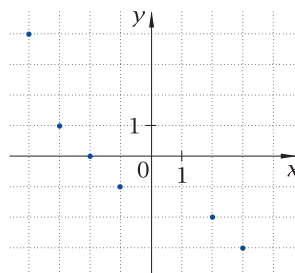
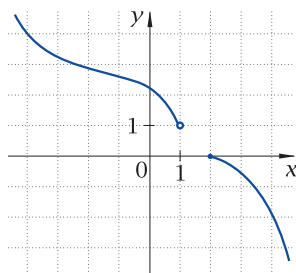
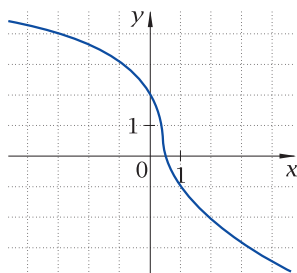
Funkcję f nazywamy **rosnącą**, gdy dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 jest spełniony warunek:

Jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$

ĆWICZENIE C Jeden z wykresów z ćwiczenia A przedstawia funkcję g spełniającą poniższy warunek. Który to wykres?

$$g(-3) > g(-1,5) > g(0) > f\left(1\frac{1}{7}\right) > g(2,55)$$

Kolejne rysunki przedstawiają fragmenty wykresów funkcji, które wraz ze wzrostem argumentów przyjmują coraz mniejsze wartości. O takich funkcjach mówimy, że są malejące. Oto przykłady funkcji malejących:



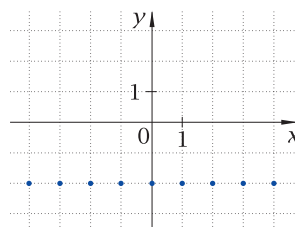
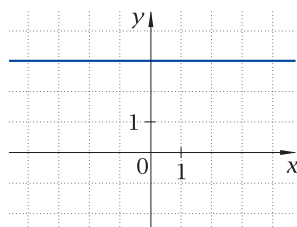
ĆWICZENIE D Dla każdej z funkcji przedstawionych na powyższych wykresach wybierz takie dwa argumenty x_1 i x_2 , że $x_1 < x_2$. Ustal, dla którego z tych argumentów funkcja przyjmuje większą wartość.

Funkcję f nazywamy **malejącą**, gdy dla dowolnych argumentów x_1 i x_2 jest spełniony warunek:

Jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$



Poniżej przedstawiono przykłady funkcji, które przyjmują tylko jedną wartość. Pierwsza z tych funkcji przyjmuje dla każdego argumentu wartość 3, a druga — wartość -2 . O takich funkcjach mówimy, że są stałe.

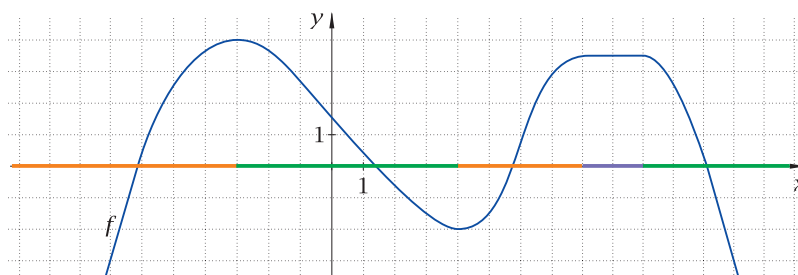


ĆWICZENIE E Narysuj wykres funkcji f , której dziedziną jest przedział $(-3; 4)$ i która każdemu argumentowi przyporządkowuje wartość 2.

Funkcję, która dla każdego argumentu przyjmuje tę samą wartość, nazywamy **funkcją stałą**.

zadania 1–2 ►

II



Przyjmijmy, że funkcja przedstawiona powyżej jest określona na zbiorze $\mathbb{R}$, a niewidoczne części wykresu to półproste. Funkcja taka nie jest oczywiście ani rosnąca, ani malejąca, ani stała, ale o funkcji f możemy powiedzieć, że jest:

rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$

malejąca w przedziale $\langle -3; 4 \rangle$

rosnąca w przedziale $\langle 4; 8 \rangle$

stała w przedziale $\langle 8; 10 \rangle$

malejąca w przedziale $\langle 10; +\infty \rangle$

Uwaga. Chociaż funkcja f rośnie w przedziale $(-\infty; -3)$ oraz w przedziale $\langle 4; 8 \rangle$, nie możemy powiedzieć, że funkcja ta jest rosnąca w zbiorze $(-\infty; -3) \cup \langle 4; 8 \rangle$, gdyż na przykład dla argumentów $x_1 = -4$ i $x_2 = 5$ spełniony jest warunek $x_1 < x_2$ i jednocześnie nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.

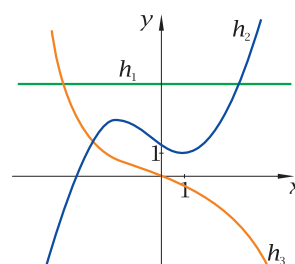
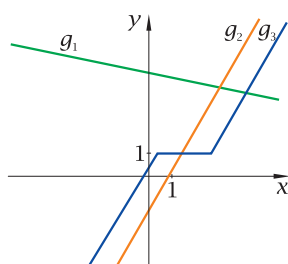
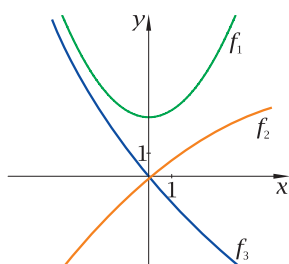
Jeśli podajemy przedziały, w których funkcja jest rosnąca, przedziały, w których jest malejąca, oraz takie, w których jest stała, to mówimy, że wyznaczamy **przedziały monotoniczności funkcji**.

zadania 3–6 ►



ZESTAW ZADAŃ

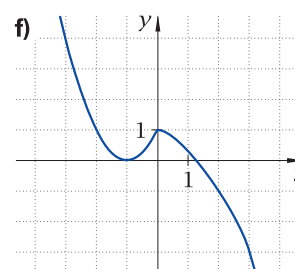
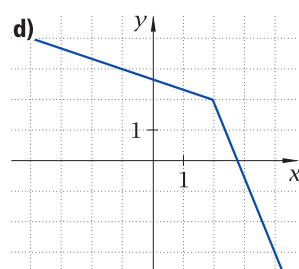
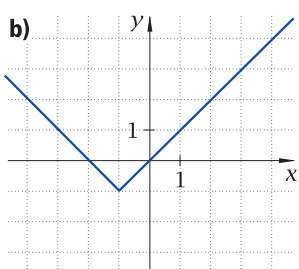
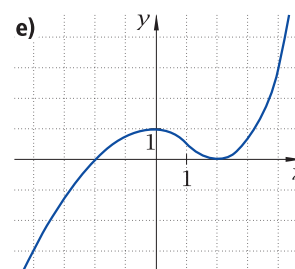
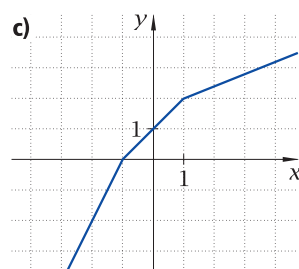
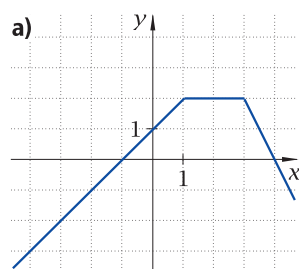
- I 1. Czy któraś z funkcji przedstawionych za pomocą wykresów może być rosnąca, malejąca albo stała?



2. Wśród podanych zależności wskaż takie, które są funkcjami rosnącymi.

- Zależność długości drogi hamowania od prędkości samochodu.
- Zależność pola kwadratu od długości jego boku.
- Zależność długości grafitu ołówka od czasu używania tego ołówka.

- II 3. Podaj przedziały monotoniczności funkcji przedstawionej za pomocą wykresu.



4. Narysuj wykres funkcji, która jednocześnie spełnia warunki:

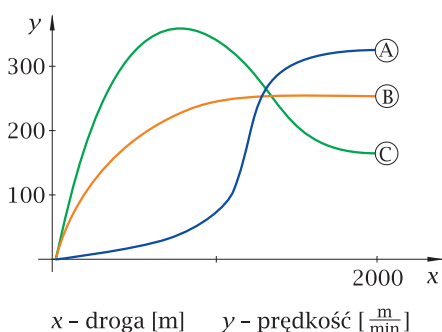
- dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych,
- funkcja jest stała w przedziale $(-\infty; -3)$ oraz w przedziale $\langle 2; +\infty)$,
- funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -3; 2)$.



5. Narysuj wykres funkcji, która jednocześnie spełnia warunki:

- dziedziną jest zbiór $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$,
- funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -4)$,
- funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 3; +\infty)$,
- funkcja jest malejąca w przedziale $\langle -4; -2)$,
- funkcja jest malejąca w przedziale $(0; 3)$.

6. W wyścigu wioślarskim na dystansie 2000 m wzięły udział trzy 8-osobowe osady reprezentujące uniwersytety z Kamfort, Oksbridż i z Jelitkowa. Wykresy pokazują, jak zmieniała się prędkość tych osad na trasie wyścigu.



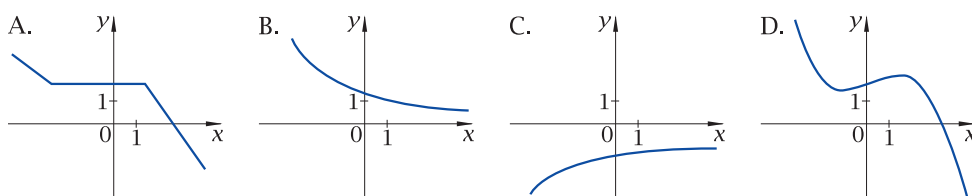
Osada z Kamfort w pierwszej fazie wyścigu rozpędzała się, a w drugiej utrzymywała stałą prędkość. Załoga z Oksbridż szybko uzyskała dużą prędkość, jednak wkrótce straciła siły i prędkość ich łódki znacznie zmalała.

a) Które wykresy opisują prędkość osad z Kamfort i Oksbridż?

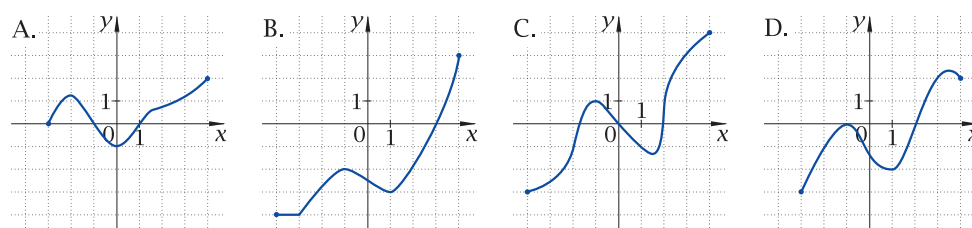
b) Jak zmieniała się prędkość osady z Jelitkowa?

MINISPRAWDZIAN

51. Na którym rysunku przedstawiono wykres funkcji malejącej?



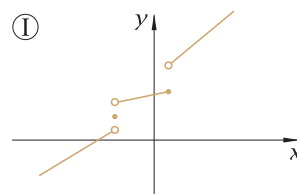
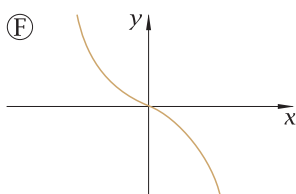
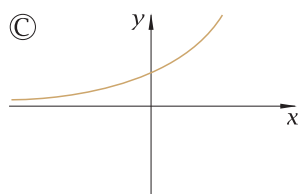
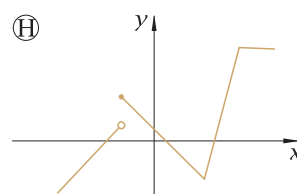
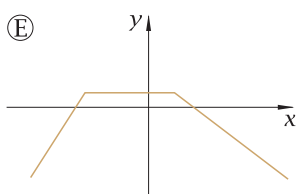
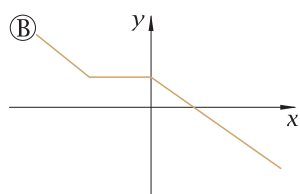
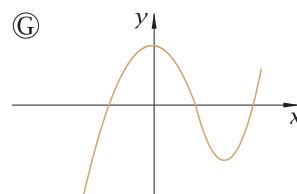
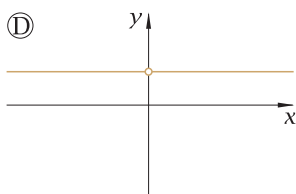
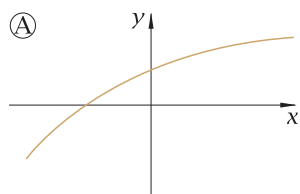
52. Która z funkcji przedstawionych poniżej spełnia warunek: jest rosnąca w przedziale $\langle -3; -1)$ i w przedziale $\langle 1; 4)$ oraz jest malejąca w przedziale $\langle -1; 1)$?





MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI

54. Które z funkcji przedstawionych na wykresach są rosnące, które — malejące, a które — stałe?



MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI

105



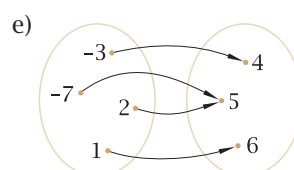
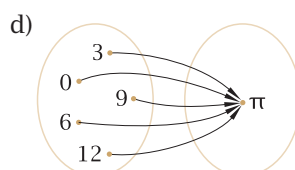
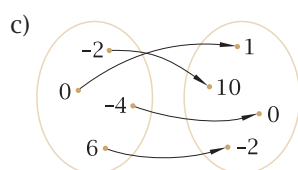
55. Określ monotoniczność funkcji podanych za pomocą tabelki lub grafu.

a)

x	-5	-2	-1	0	2	5	6
y	-7	-1	0	3	4	5	8

b)

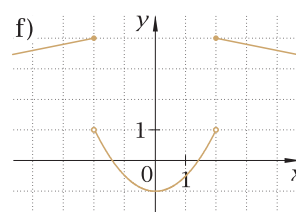
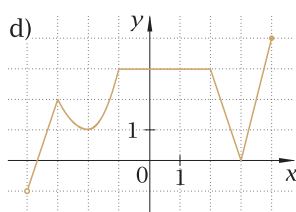
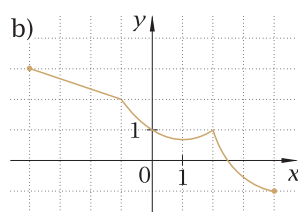
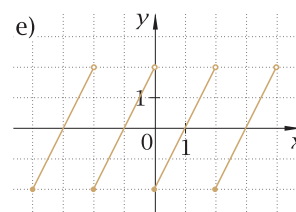
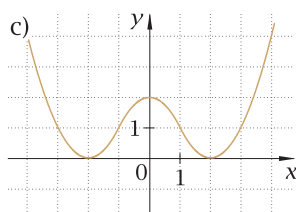
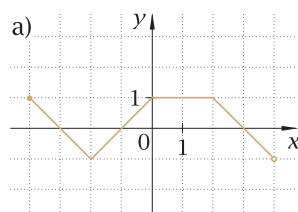
x	1	2	3	4
y	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$3 + \sqrt{2}$	$6 - \sqrt{3}$



56. Określ monotoniczność funkcji określonej w podany sposób.

- Każdej liczbie niedodatniej przyporządkowujemy kwadrat tej liczby powiększony o 4.
- Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowujemy dwukrotność tej liczby.
- Każdej liczbie dodatniej przyporządkowujemy jej odwrotność.
- Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowujemy jej wartość bezwzględną.
- Każdej liczbie naturalnej czterocyfrowej przyporządkowujemy sumę cyfr występujących w zapisie tej liczby.
- Każdej liczbie naturalnej podzielnej przez 10 przyporządkowujemy iloczyn cyfr występujących w zapisie tej liczby.
- Każdej liczbie ujemnej przyporządkowujemy różnicę między tą liczbą a wartością bezwzględną tej liczby.
- Każdej liczbie niedodatniej przyporządkowujemy sumę tej liczby i wartości bezwzględnej tej liczby.

57. Odczytaj przedziały monotoniczności funkcji przedstawionej na wykresie.

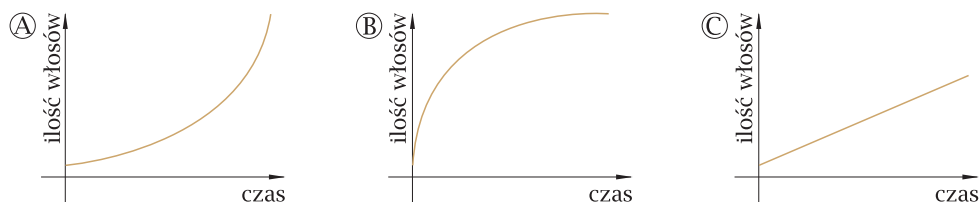




58. Narysuj wykres funkcji, która spełnia podane warunki.

- a) Dziedzina jest zbiór liczb rzeczywistych, funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty; -3)$, malejąca w przedziale $\langle -3; -1 \rangle$, stała w przedziale $\langle -1; 1 \rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 1; +\infty \rangle$.
- b) Dziedzina jest zbiór liczb rzeczywistych, funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$, stała w przedziale $\langle -2; 3 \rangle$, rosnąca w przedziale $\langle 3; +\infty \rangle$ i wszystkie wartości tej funkcji są ujemne.
- c) Dziedzina funkcji jest zbiór $\langle -3; 4 \rangle$, zbiorem wartości przedział $\langle -1; 3 \rangle$, funkcja jest rosnąca w przedziałach $\langle -3; -1 \rangle$ oraz $\langle 2; 4 \rangle$, stała w przedziale $\langle -1; 0 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 0; 2 \rangle$, miejscami zerowymi funkcji są liczby: $-2, 1, 3$.

59. Dopasuj poniższe wykresy do haseł reklamowych pewnych preparatów na porost włosów.



- I. Stosując nasz preparat, w krótkim czasie zauważysz gwałtowny przyrost ilości włosów, a następnie ich ilość ulegnie stabilizacji.
- II. Początkowo efekty stosowania naszej odżywki są niewielkie, ale po pewnym czasie ilość włosów gwałtownie się zwiększa.
- III. Stosując naszą odżywkę, uzyskasz stały przyrost ilości włosów.

60. Wśród podanych zależności wskaż takie, które są funkcjami malejącymi.

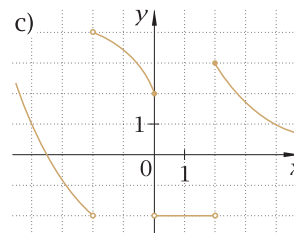
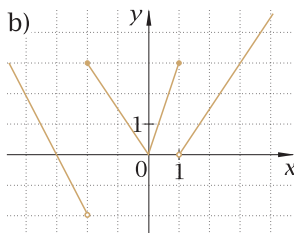
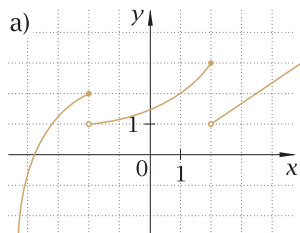
- a) Zależność wysokości, na której znajduje się spadające ciało, od czasu spadania.
- b) Zależność ilości benzyny pozostałej w baku samochodu od przejechanej odległości (bez tankowania).
- c) Zależność drogi pokonanej przez hamujący pojazd od czasu, który upłynął od początku hamowania.
- d) Zależność ilości napoju w butelce od ilości wypitego już napoju z tej butelki.

61. Wśród podanych funkcji są takie, które są rosnące. Które to funkcje?

- a) Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkujemy liczbę o 2 mniejszą.
- b) Każdej liczbie naturalnej przyporządkujemy średnią arytmetyczną wszystkich liczb naturalnych mniejszych od niej.
- c) Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkujemy najmniejszą z liczb całkowitych większych od x .
- d) Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkujemy jej kwadrat.



62. Odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności funkcji.



63. Korzystając z definicji funkcji rosnącej lub z definicji funkcji malejącej, wykaż, że:

- a) funkcja $f(x) = 5 - 2x$ jest malejąca,
- b) funkcja $f(x) = \frac{6+3x}{4}$ jest rosnąca,
- c) funkcja $f(x) = 5 - x^2$ jest rosnąca dla $x \leq 0$,
- d) funkcja $f(x) = \frac{4}{x} + 2$ jest malejąca dla $x > 0$,
- e) funkcja $f(x) = x^2 - 6x + 5$ jest malejąca dla $x \leq 3$ i rosnąca dla $x \geq 3$,
- f) funkcja $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ jest rosnąca dla $x \leq 2$ i malejąca dla $x \geq 2$,
- g) funkcja $f(x) = |2x - 3|$ jest malejąca dla $x \leq \frac{3}{2}$ i rosnąca dla $x \geq \frac{3}{2}$,
- h) funkcja $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$ jest rosnąca w przedziale $(0; +\infty)$,
- i) funkcja $f(x) = \frac{2}{x} - x$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 0)$,
- j) funkcja $f(x) = \frac{x}{1-x}$ jest rosnąca w przedziale $(1; +\infty)$,
- k) funkcja $f(x) = \frac{-2x}{x+2}$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$.

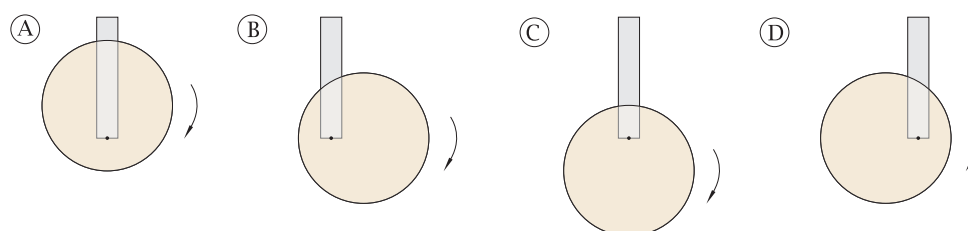
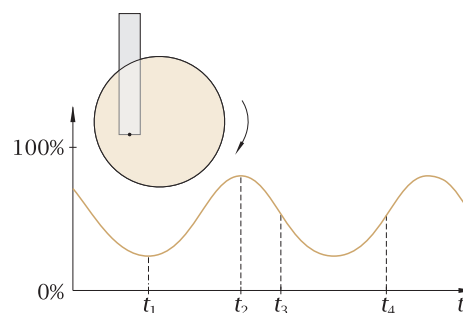
64. Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$. Które z poniższych zdań są zawsze prawdziwe?

- I. Jeśli a i b są argumentami z przedziału $\langle 0; 5 \rangle$, to $f(a) < f(b)$.
- II. Jeśli $f(5) < 0$, to funkcja f przyjmuje w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$ tylko wartości ujemne.
- III. Jeśli $f(0) < 0$ i $f(5) > 0$, to funkcja f ma miejsce zerowe w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$.
- IV. Największą wartość w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$ funkcja f przyjmuje dla argumentu 5.
- V. Funkcja f ma w przedziale $\langle 0; 5 \rangle$ co najwyżej jedno miejsce zerowe.

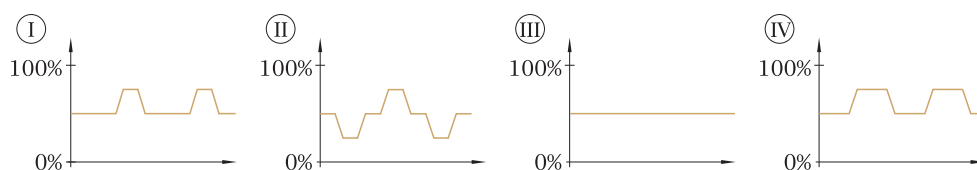
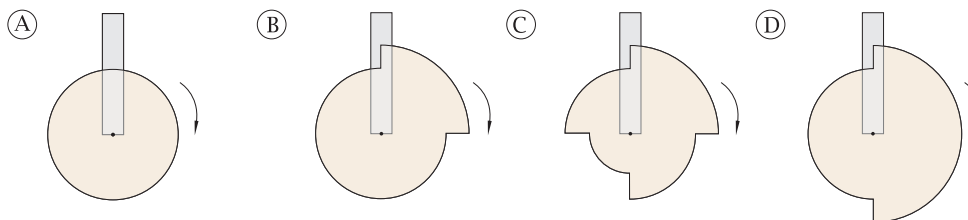
65. Narysuj wykres takiej funkcji, której dziedziną jest zbiór $\langle -7; 0 \rangle \cup (0; 7 \rangle$, że funkcja ta jest rosnąca w przedziale $\langle -7; 0 \rangle$ i jest rosnąca w przedziale $(0; 7 \rangle$, ale nie jest rosnąca w zbiorze $\langle -7; 0 \rangle \cup (0; 7 \rangle$.



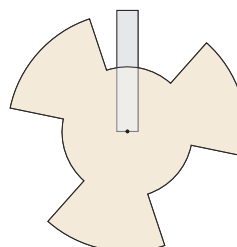
66. a) Na obracającej się ze stałą prędkością osi zamocowano kawałek kartonu o kształcie przedstawionym na rysunku. Obracając się, karton zakrywa raz większą, a raz mniejszą część prostokątnego paska. Wykres przedstawia, jaka część jest w danej chwili zasłonięta. Dopasuj zaznaczone na wykresie chwile t_1 , t_2 , t_3 , t_4 do przedstawionych położeń układu (A), (B), (C), (D).



b) Gdyby zmienić kształt kawałka kartonu, zmieniłby się również wykres. Poniżej narysowano kartony o czterech różnych kształtach. Dopasuj do każdego z nich odpowiedni wykres.

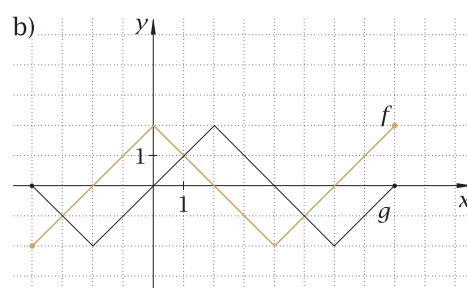
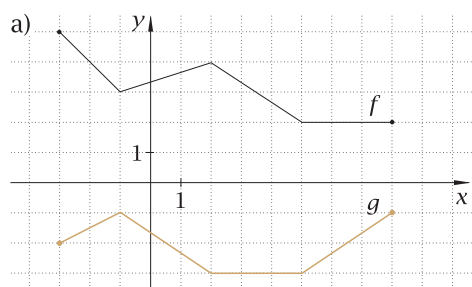


c) Naskicuj wykres funkcji opisującej, jaką część prostokąta zasłania obracająca się (ze stałą prędkością) tarcza przedstawiona na rysunku obok.

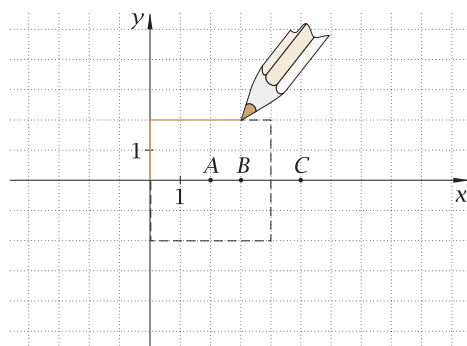




67. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f i g . Określ przedziały monotoniczności funkcji r i s , gdzie $r(x) = f(x) - g(x)$ oraz $s(x) = f(x) + g(x)$.



68. Wyobraź sobie, że koniec ołówka ustawiamy w początku układu współrzędnych i zaczynamy rysować kwadrat tak, jak na rysunku obok. Oznaczmy przez d długość już narysowanej kreski. Funkcje $f(d)$, $g(d)$ i $h(d)$ określamy jako odległość końca ołówka od punktów odpowiednio A , B i C w momencie, gdy kreska ma długość d . Wyznacz przedziały monotoniczności każdej z tych funkcji.





MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI

1. Wpisz znaki: $<$, $>$ lub $=$.

a) Funkcja f jest rosnąca.

$f(4) \dots f(5)$

$f(-37) \dots f(4)$

$f(42) \dots f(35)$

b) Funkcja g jest malejąca.

$g(7) \dots g(10)$

$g(-23) \dots g(5)$

$g(-33) \dots g(-58)$

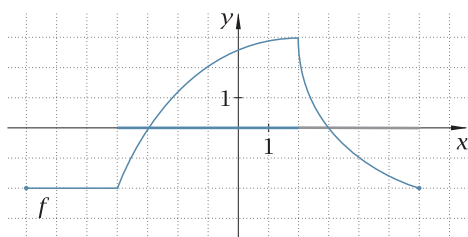
c) Funkcja h jest stała.

$h(6) \dots h(9)$

$h(-15) \dots h(10)$

$h(27) \dots h(98)$

2. Zaznacz na osi x kolorem niebieskim te argumenty, dla których funkcje f , g , h i k przedstawione na wykresach są rosnące, kolorem szarym — te argumenty, dla których funkcje f , g , h i k są malejące. Następnie uzupełnij poniższe zdania.

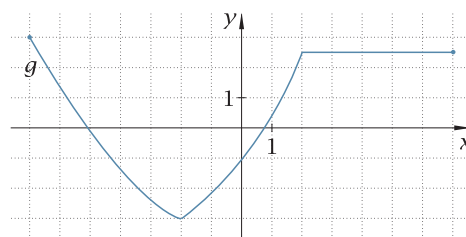


Funkcja f jest:

rosnąca w przedziale $\langle \dots; \dots \rangle$,

malejąca w przedziale $\langle \dots; \dots \rangle$,

stała w przedziale $\langle \dots; \dots \rangle$.

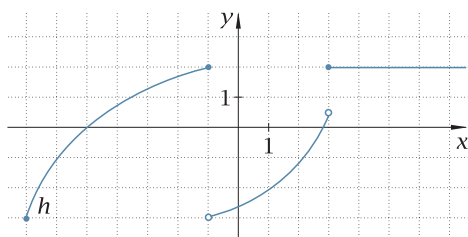


Funkcja g jest:

malejąca w przedziale $\dots$,

rosnąca w przedziale $\dots$,

stała w przedziale $\dots$.

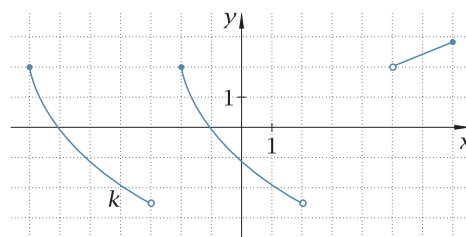


Funkcja h jest:

$\dots$ w przedziale $\langle 3; +\infty \rangle$,

$\dots$ w przedziałach

$\dots$ oraz $\dots$.



Funkcja k jest:

malejąca w przedziałach

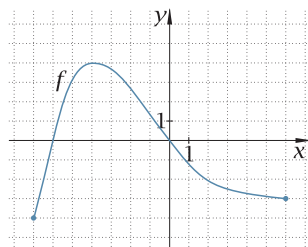
$\dots$ oraz $\dots$,

rosnąca w przedziale $\dots$.



MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI

3. Podaj przedziały monotoniczności funkcji przedstawionej na wykresie.

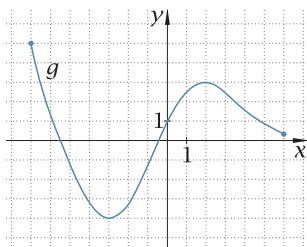


Funkcja f jest rosnąca

w przedziale

a malejąca w przedziale

.....

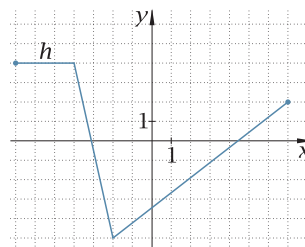


Funkcja g jest

.....

.....

.....



Funkcja h jest

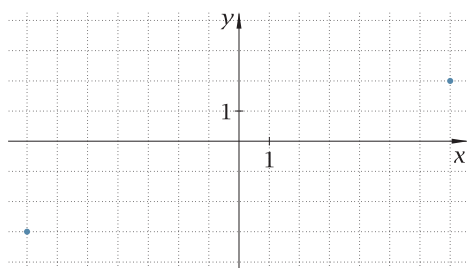
.....

.....

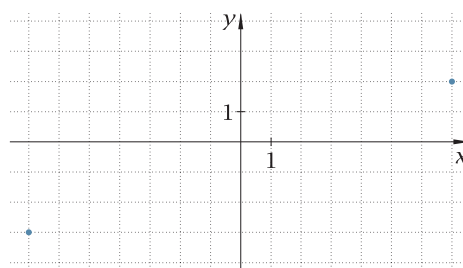
.....

4. Dziedziną opisanej funkcji jest przedział $\langle -7; 7 \rangle$, a zaznaczone punkty należą do jej wykresu. Uzupełnij wykres funkcji tak, by spełniała podane warunki.

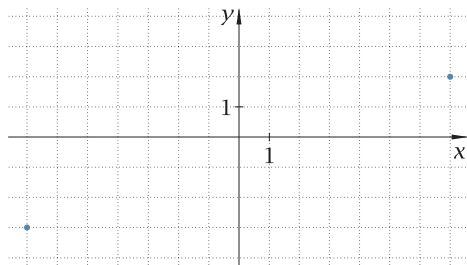
a) Funkcja jest malejąca w przedziale $\langle -7; -3 \rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle -3; 7 \rangle$.



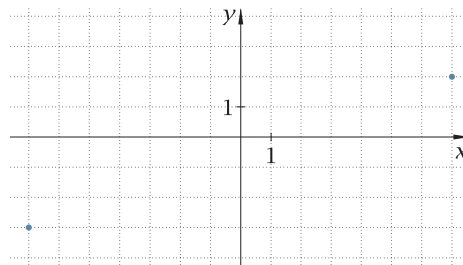
b) Funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -7; 1 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 1; 4 \rangle$ i stała w przedziale $\langle 4; 7 \rangle$.



c) Funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -7; -2 \rangle$, stała w przedziale $\langle -2; 2 \rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 2; 7 \rangle$.



d) Funkcja jest rosnąca w przedziałach $\langle -7; -4 \rangle$ oraz $\langle 0; 5 \rangle$, stała w przedziale $\langle -4; 0 \rangle$, malejąca w przedziale $\langle 5; 7 \rangle$.





KARTY PRACY UTWORZONE Z WYKORZYSTANIEM *KOMPOZYTORA* *KLASÓWEK I KART PRACY*

Więcej informacji o programie na www.matematyka.kompozytorklasowek.gwo.pl.



Zestaw zadań

str. 1/2
grupa **A**

.....
imię i nazwisko

.....
lp. w dzienniku

.....
klasa

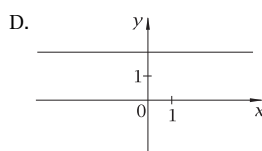
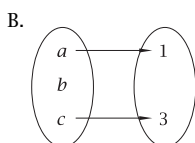
.....
data

1. Poniżej podano przykłady przyporządkowań. Funkcją nie jest przyporządkowanie:

A.

x	-2	-1	0	1	2
y	0	0	0	0	0

C. Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy resztę z dzielenia jej przez 3.



2. Funkcja, której dziedziną jest zbiór $\{-3, -1, 0, 1, 3\}$, jest określona za pomocą tabeli.

x	-3	-1	0	1	3
y	0	-2	4	2	0

Które z poniższych stwierdzeń jest fałszywe?

- A. Dla argumentu 0 funkcja f przyjmuje wartość 4.
 B. Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie dla dwóch argumentów.
 C. Funkcja f ma dwa miejsca zerowe.
 D. Dla argumentów ujemnych funkcja f przyjmuje wartości ujemne.
3. Funkcja f każdej liczbie naturalnej przyporządkowuje liczbę jej naturalnych dzielników pomniejszoną o 1. Ile wynosi $f(36)$?
 A. 15 B. 8 C. 9 D. 6
4. Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje sześcian tej liczby powiększony o 8. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?
 A. Funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie wyłącznie dla $x < -2$.
 B. Funkcja f przyjmuje wartości ujemne wyłącznie dla $x < -2$.
 C. Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie wyłącznie dla $x > 2$.
 D. Funkcja f przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie.
5. Funkcję f przedstawiono za pomocą tabeli:

x	-7	-2,5	$\sqrt{3}-1$	3	5
$f(x)$	$2\pi-6,28$	$2\sqrt{2}-3$	$-4(8-\sqrt{65})$	0	$2,(2)-\sqrt{5}$

Zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne, to:

- A. $\{2\pi-6,28; -4(8-\sqrt{65}); 0\}$ B. $\{-7; \sqrt{3}-1; 3\}$ C. $\{-7; -2,5; 3\}$ D. $\{-7; \sqrt{3}-1\}$
6. Funkcja jest określona za pomocą tabelki podanej obok.
 Wartość tej funkcji dla argumentu 2 wynosi:

x	-2	-1	0	1	2
y	1	2	1	2	4

- A. 4 B. 2 C. -1 D. 1



grupa **A**

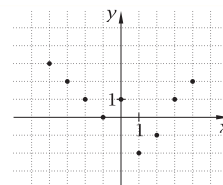
str. 2/2

7. Funkcja f jest określona w zbiorze liczb całkowitych w następujący sposób: jeżeli odległość liczby k na osi liczbowej od liczby 5 jest większa od 7 jednostek, to liczbie k przyporządkowujemy wartość k^2 , w przeciwnym wypadku — przyporządkowujemy wartość $(-k)$. Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartości ujemne?

A. dla piętnastu B. dla trzynastu C. dla nieskończenie wielu D. dla dwunastu

8. Na podstawie wykresu funkcji f uzupełnij tabelę.

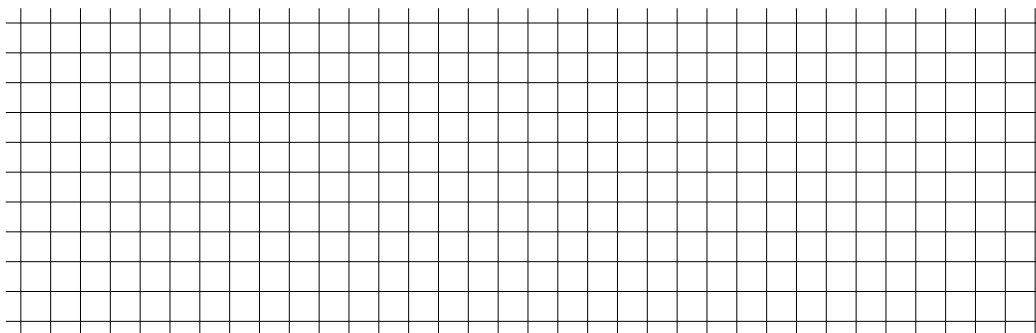
x	-2		0	
y		-1		0



9. Funkcja f jest określona za pomocą tabelki:

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x \leq -1$	$-1 < x \leq 0$	$x > 0$
$f(x)$	4	3	2	0	-1

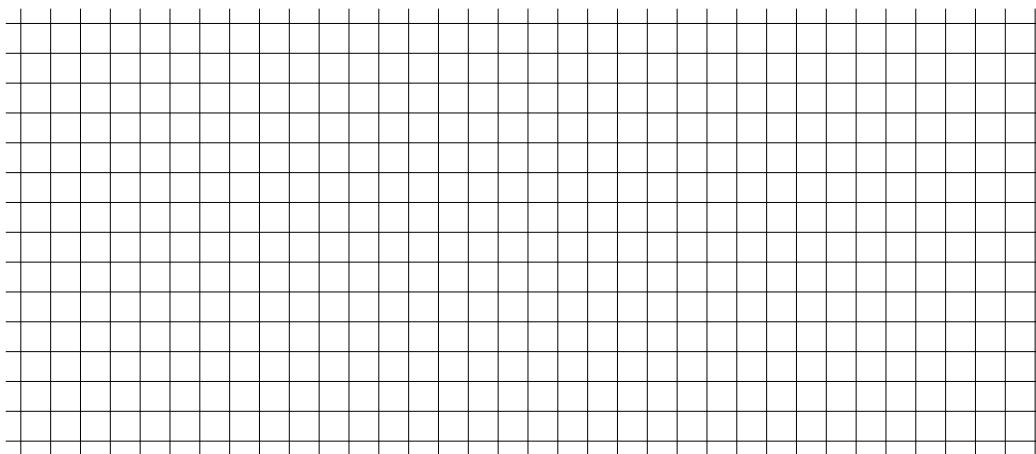
Podaj wartości: $f(-1,5)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f(-94)$, $f(3)$, $f(-1)$.



10. Funkcja f jest określona w następujący sposób: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, a każdej liczbie $x \neq -\frac{1}{2}$ funkcja przyporządkowuje mniejszą z liczb $\left(-\frac{1}{2}\right)$ i x .

a) Podaj wartości $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(-\sqrt{2})$.

b) Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość -1 , a dla jakiego — wartość (-13) ?





Zestaw zadań

str. 1/2
grupa **B**

.....
imię i nazwisko

.....
lp. w dzienniku

.....
klasa

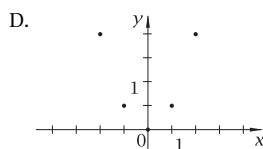
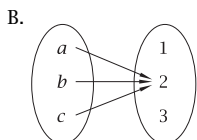
.....
data

1. Poniżej podano przykłady przyporządkowań. Funkcją nie jest przyporządkowanie:

A.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

C. Każdej liczbie naturalnej przyporządkowujemy wszystkie jej dzielniki.



2. Funkcja, której dziedziną jest zbiór $\{-6, -1, 0, 2, 5\}$, jest określona za pomocą tabeli.

x	-6	-1	0	2	5
y	7	0	-3	0	7

Które z poniższych stwierdzeń jest fałszywe?

- A. Dla argumentu 0 funkcja f przyjmuje wartość -3 .
B. Funkcja f przyjmuje wartości ujemne dla jednego argumentu.
C. Funkcja f ma trzy miejsca zerowe.
D. Dla argumentów ujemnych funkcja f przyjmuje wartości nieujemne.
3. Funkcja f każdej liczbie naturalnej przyporządkowuje liczbę jej naturalnych dzielników pomniejszoną o 1. Ile wynosi $f(24)$?
A. 8 B. 15 C. 7 D. 6
4. Funkcja f każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje sześcian tej liczby pomniejszony o 8. Które z poniższych zdań jest prawdziwe?
A. Funkcja f przyjmuje wyłącznie wartości ujemne.
B. Funkcja f przyjmuje wartości niedodatnie wyłącznie dla $x < 2$.
C. Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie wyłącznie dla $x > -2$.
D. Funkcja f przyjmuje wartości ujemne wyłącznie dla $x < 2$.
5. Funkcję f przedstawiono za pomocą tabeli:

x	-6	$\sqrt{5}-2$	1	3	8
$f(x)$	$1, (7) - \sqrt{3}$	$6, 28 - 2\pi$	0	$2\sqrt{3} - 4$	$-5(7 - \sqrt{50})$

Zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości niedodatnie, to:

- A. $\{6, 28 - 2\pi; 0; 2\sqrt{3} - 4\}$ B. $\{\sqrt{5} - 2; 3\}$ C. $\{\sqrt{5} - 2; 1; 3\}$ D. $\{\sqrt{5} - 2; 3; 8\}$
6. Funkcja jest określona za pomocą tabelki podanej obok.
Wartość tej funkcji dla argumentu 2 wynosi:

x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	2	3	1

- A. 1 B. -2 C. 0 D. 3

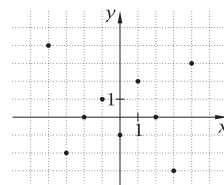


7. Funkcja f jest określona w zbiorze liczb całkowitych w następujący sposób: jeżeli odległość liczby k na osi liczbowej od liczby 6 jest większa od 8 jednostek, to liczbie k przyporządkowujemy wartość k^2 , w przeciwnym wypadku — przyporządkowujemy wartość $(-k)$. Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartości ujemne?

A. dla czternastu B. dla siedemnastu C. dla nieskończenie wielu D. dla piętnastu

8. Na podstawie wykresu funkcji f uzupełnij tabelę.

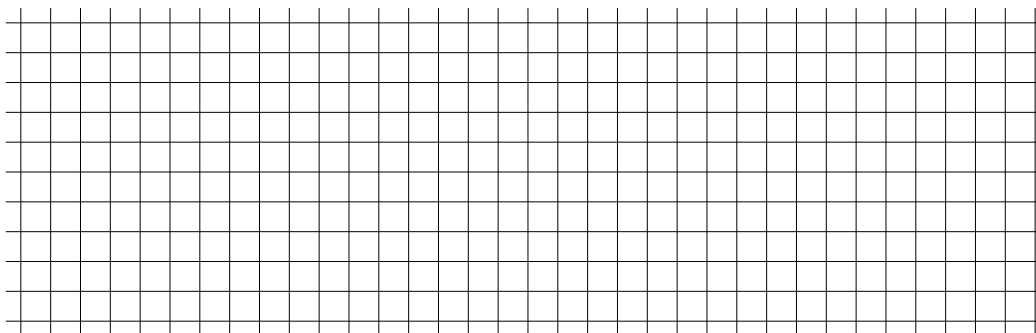
x	-1		0	
y		-3		3



9. Funkcja f jest określona za pomocą tabelki:

	$x < 1$	$1 \leq x < 2$	$2 \leq x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f(x)$	-5	-3	1	0	2

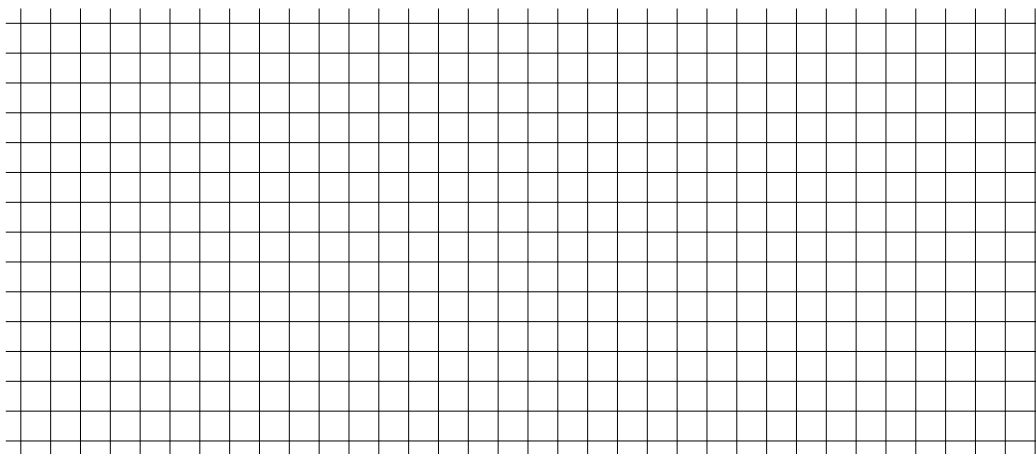
Podaj wartości: $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f(72)$, $f(1,5)$.



10. Funkcja f jest określona w następujący sposób: $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, a każdej liczbie $x \neq \frac{1}{3}$ funkcja przyporządkowuje mniejszą z liczb $\frac{1}{3}$ i x .

a) Podaj wartości $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(\sqrt{3})$.

b) Dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje wartość 0, a dla jakiego — wartość (-15) ?





Zestaw zadań

str. 1/2
grupa **A**

.....
imię i nazwisko

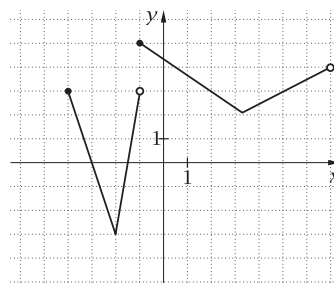
.....
lp. w dzienniku

.....
klasa

.....
data

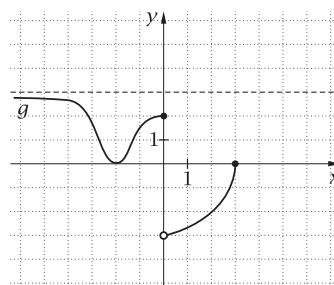
1. Dla jakich argumentów przedstawiona na wykresie funkcja przyjmuje wartość 3?

- A. dla $x \in \{2, 5\}$
B. dla $x \in \{-4, 2, 5\}$
C. dla $x \in \{-4, -1, 2, 5\}$
D. dla $x \in \langle 2; 5 \rangle$



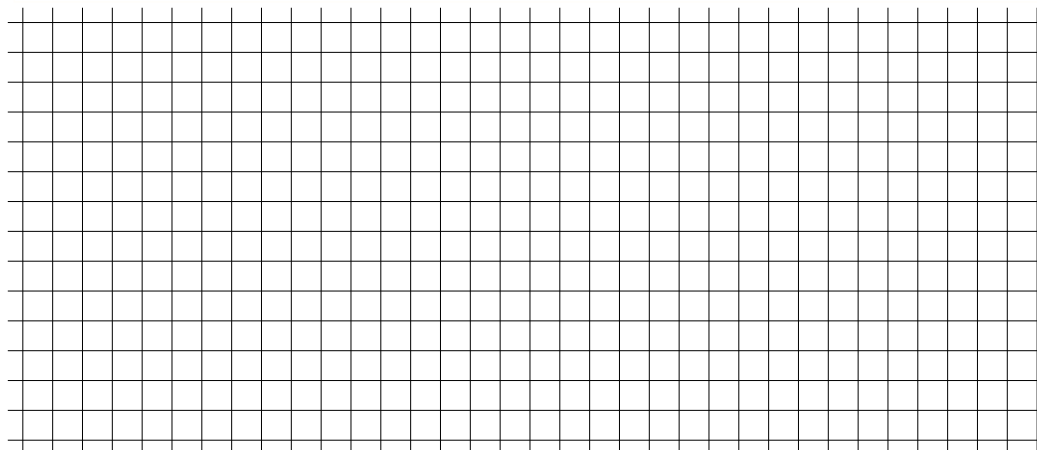
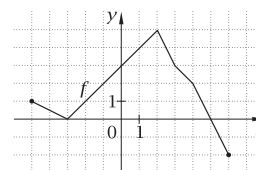
2. Obok przedstawiono wykres funkcji g . Zbiór wartości tej funkcji można przedstawić w postaci:

- A. $(-3; 3)$ C. $(-\infty; 3)$
B. $(-3; 3]$ D. $(-3; 0) \cup (0; 3)$



3. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji f .

- a) Jakie wartości przyjmuje funkcja f dla argumentów $x = -2$ i $x = 1$?
b) Podaj argumenty, dla których wartość funkcji jest równa 2.
c) Podaj współrzędne punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.
d) Jaka najmniejsza i jaka największa wartość przyjmuje ta funkcja?

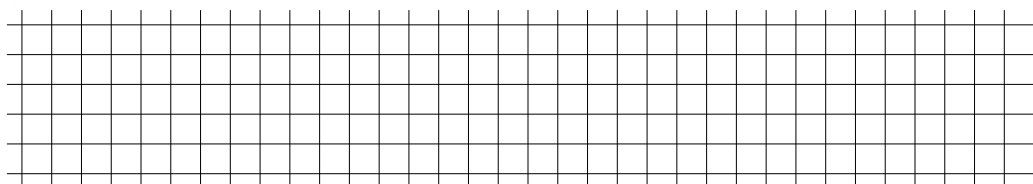
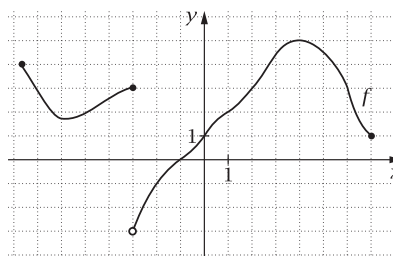




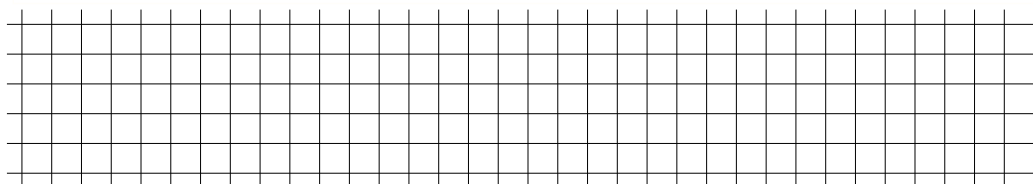
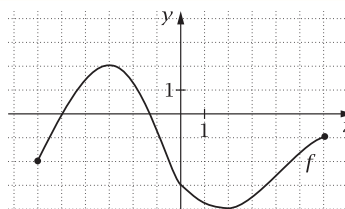
grupa A

str. 2/2

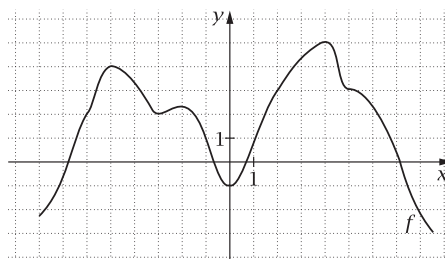
4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .
- Odczytaj $f(-3)$, $f(0)$.
 - Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość -1 , a dla jakich — wartość 5 ?
 - Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartość 3 ?



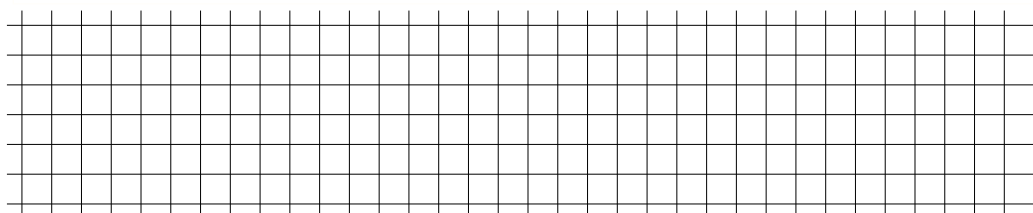
5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .
- Jaka jest dziedzina funkcji f ?
 - Jaki jest zbiór wartości funkcji f ?
 - Ile miejsc zerowych ma ta funkcja?



6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Funkcję g określamy następująco: $g(n) = (n + 1) \cdot f(n)$ dla każdej liczby całkowitej n .



Oblicz wartości: $g(-3)$, $g(0)$, $g(-1)$, $g(2)$.





Zestaw zadań

str. 1/2
grupa **B**

.....
imię i nazwisko

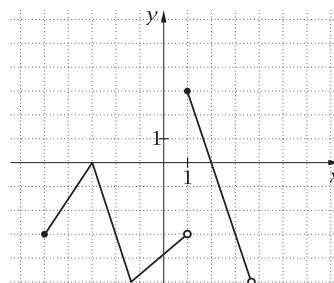
.....
lp. w dzienniku

.....
klasa

.....
data

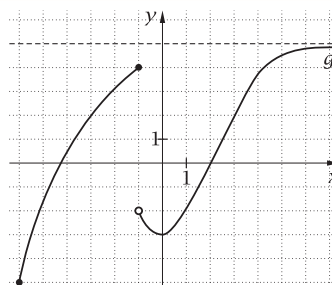
1. Dla jakich argumentów przedstawiona na wykresie funkcja przyjmuje wartość -3 ?

- A. dla $x \in \{-5, -2, 3\}$
B. dla $x \in \{-2, 3\}$
C. dla $x \in \{-5, 2, 1, 3\}$
D. dla $x \in \langle -2; 3 \rangle$



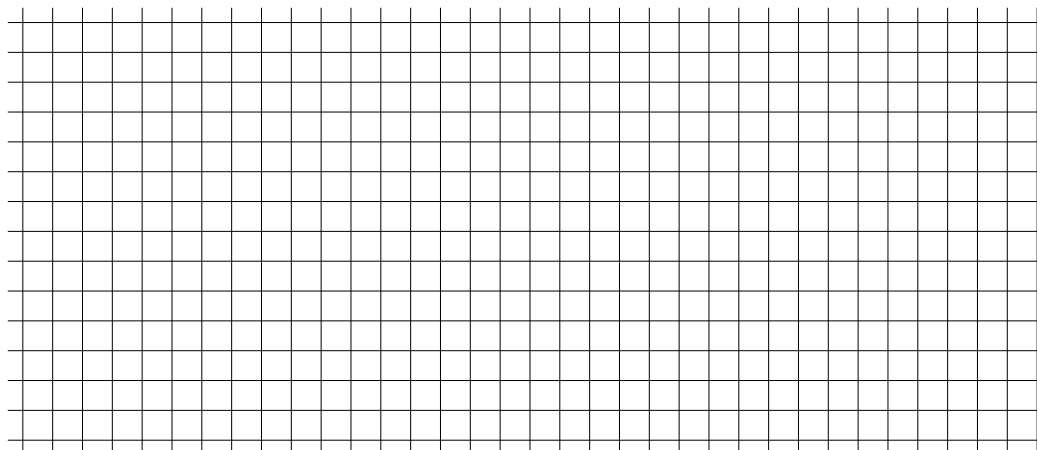
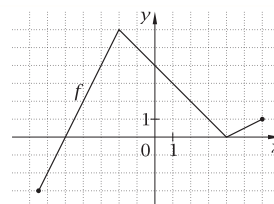
2. Obok przedstawiono wykres funkcji g . Zbiór wartości tej funkcji można przedstawić w postaci:

- A. $\langle -5; +\infty \rangle$ C. $\langle -5; 5 \rangle$
B. $\langle -6; 4 \rangle$ D. $\langle -5; -1 \rangle \cup \langle -1; 5 \rangle$



3. Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji f .

- a) Jakie wartości przyjmuje funkcja f dla argumentów $x = -3$ i $x = 1$?
b) Podaj argumenty, dla których wartość funkcji jest równa 2.
c) Podaj współrzędne punktów przecięcia wykresu z osiami układu współrzędnych.
d) Jaka najmniejsza i jaka największa wartość przyjmuje ta funkcja?

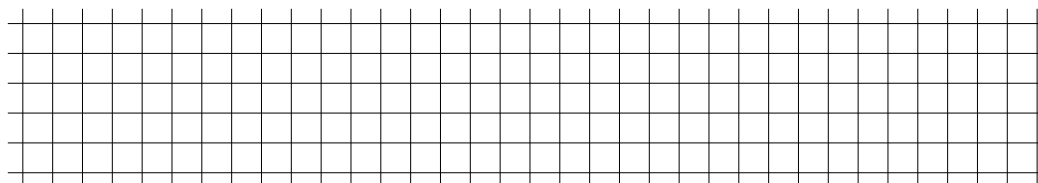
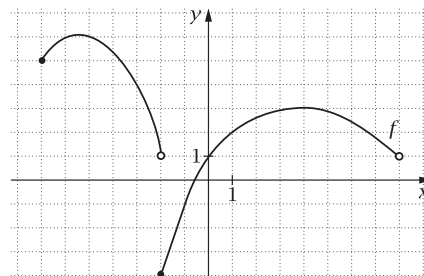




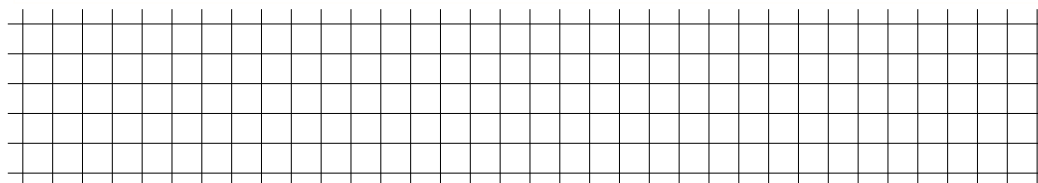
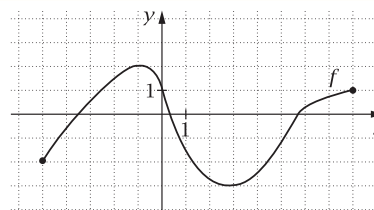
grupa B

str. 2/2

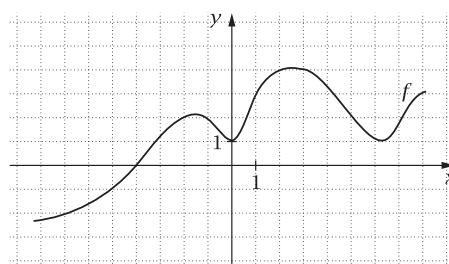
4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .
- Odczytaj $f(-2)$, $f(4)$.
 - Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartość 4, a dla jakich — wartość -1 ?
 - Dla ilu argumentów funkcja f przyjmuje wartość 2?



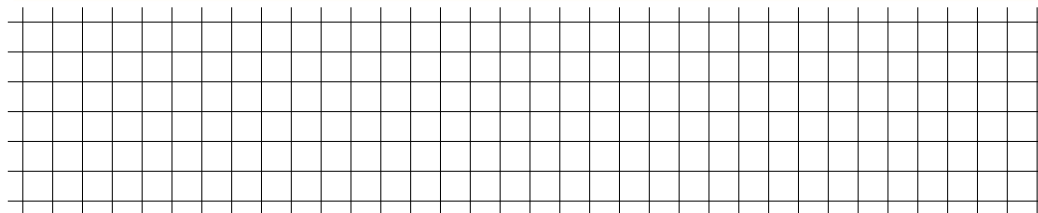
5. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f .
- Jaka jest dziedzina funkcji f ?
 - Jaki jest zbiór wartości funkcji f ?
 - Ile miejsc zerowych ma ta funkcja?



6. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Funkcję g określamy następująco: $g(n) = 3n \cdot f(n)$ dla każdej liczby całkowitej n .



Oblicz wartości: $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(1)$.





Zestaw zadań

str. 1/2
grupa **A**

.....
imię i nazwisko

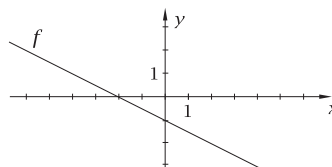
.....
lp. w dzienniku

.....
klasa

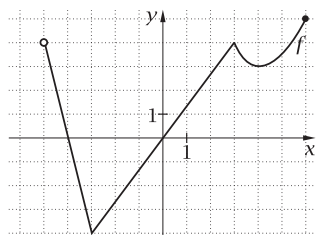
.....
data

1. Funkcja f , której wykres przedstawiono obok, jest funkcją:

- A. rosnącą C. malejącą
B. stałą D. Nie można tego określić.

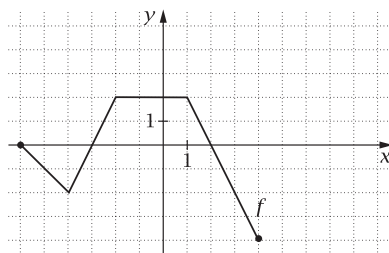


2. Jakie są maksymalne przedziały, w których przedstawiona na wykresie funkcja f rośnie?



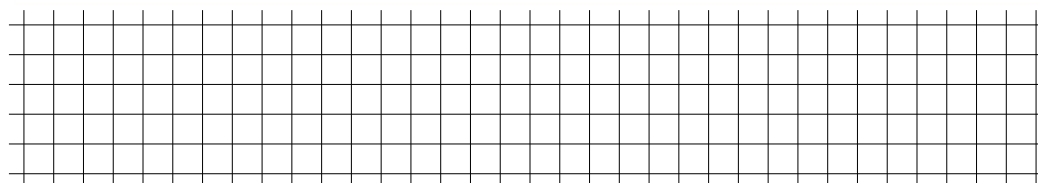
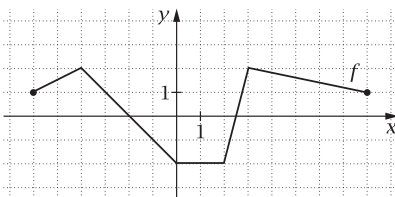
- A. $\langle -3; 3 \rangle$ oraz $\langle 4; +\infty \rangle$ B. $\langle -5; -3 \rangle$ oraz $\langle 3; 4 \rangle$ C. $\langle -3; 3 \rangle$ oraz $\langle 4; 6 \rangle$ D. $\langle 0; 6 \rangle$

3. Funkcja f jest określona za pomocą wykresu. Które z poniższych stwierdzeń jest fałszywe?



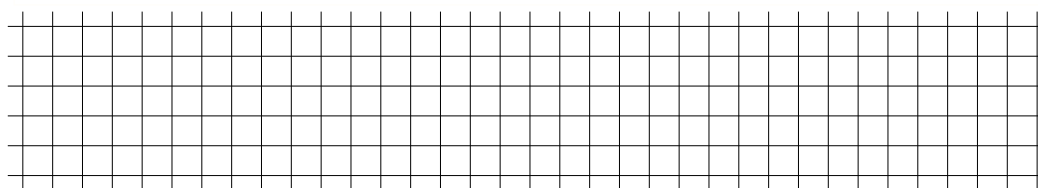
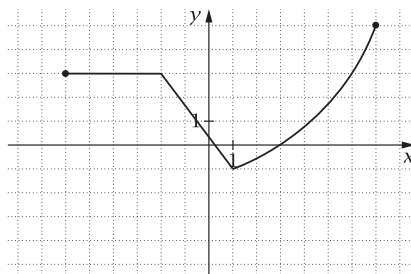
- A. $f(-2,8) < f(2,1)$ C. Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle -4; -2 \rangle$.
B. $f(x) \geq 0$ dla $x \in \langle -3; 2 \rangle \cup \{-6\}$ D. $f(-4) = f(3)$

4. Przyjrzyj się wykresowi funkcji f . Podaj możliwie najdłuższy przedział, w którym funkcja f jest malejąca.

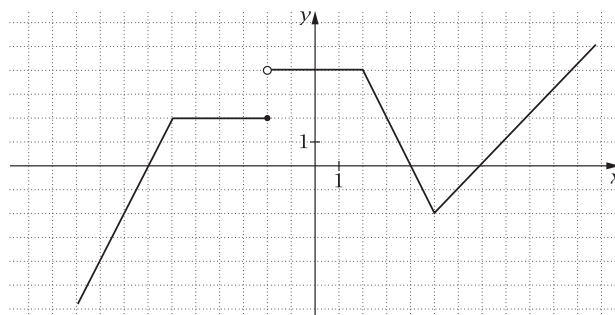




5. Podaj przedziały monotoniczności funkcji przedstawionej na wykresie.



6. Przyjrzyj się wykresowi funkcji przedstawionemu na rysunku i oceń prawdziwość podanych zdań.



Funkcja jest rosnąca dla $x < -6$ oraz dla $x > 5$.

☐ TAK ☐ NIE

W przedziale $\langle -4; 2 \rangle$ funkcja jest stała.

☐ TAK ☐ NIE

W przedziale $\langle 4; 7 \rangle$ funkcja jest malejąca.

☐ TAK ☐ NIE

W przedziale $(-\infty; -6)$ funkcja jest malejąca.

☐ TAK ☐ NIE

W przedziale $(-2; 2)$ funkcja jest stała.

☐ TAK ☐ NIE



Zestaw zadań

str. 1/2
grupa **B**

.....
imię i nazwisko

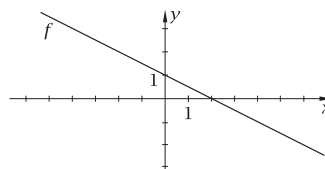
.....
lp. w dzienniku

.....
klasa

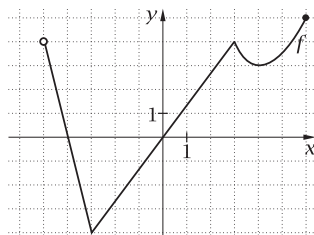
.....
data

1. Funkcja f , której wykres przedstawiono obok, jest funkcją:

- A. rosnącą C. stałą
B. malejącą D. Nie można tego określić.

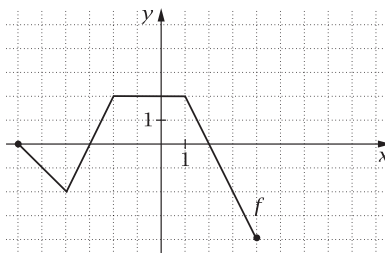


2. Jakie są maksymalne przedziały, w których przedstawiona na wykresie funkcja f maleje?



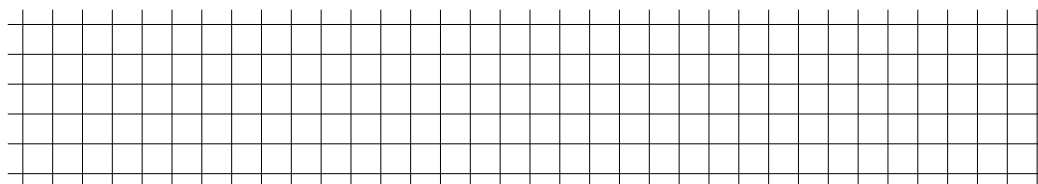
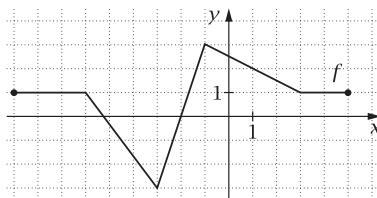
- A. $(-5; -3)$ oraz $(3; 4)$ B. $(-3; 3)$ oraz $(4; 6)$ C. $(-\infty; -3)$ oraz $(3; 4)$ D. $(-4; -0)$

3. Funkcja f jest określona za pomocą wykresu. Które z poniższych stwierdzeń jest fałszywe?



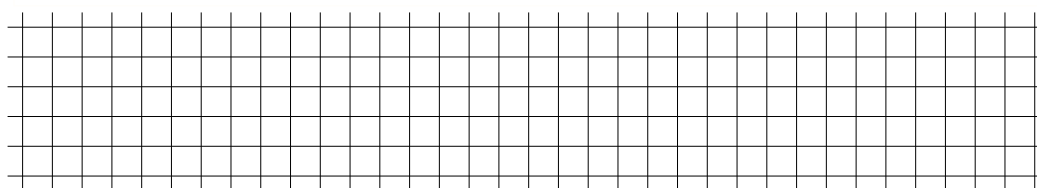
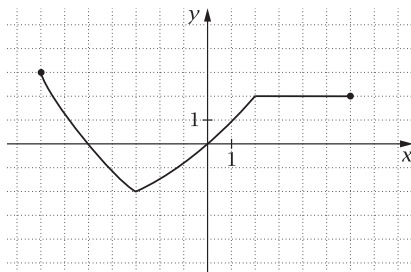
- A. $f(-5,9) < f(-2,9)$
B. $f(x) < 0$ dla $x \in (-6; -3) \cup (2; 4)$
C. Funkcja f jest malejąca w przedziałach $(-6; -4)$ oraz $(1; 4)$.
D. $f(-2) = f(2)$

4. Przyjrzyj się wykresowi funkcji f . Podaj możliwie najdłuższy przedział, w którym funkcja f jest malejąca.

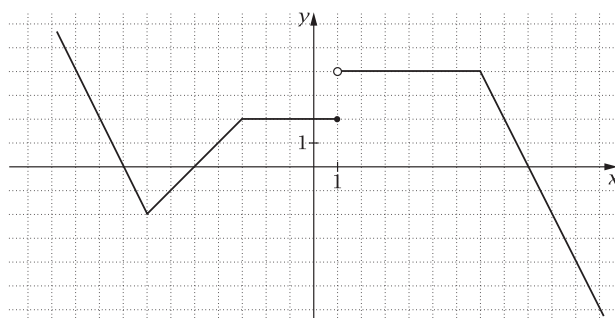




5. Podaj przedziały monotoniczności funkcji przedstawionej na wykresie.



6. Przyjrzyj się wykresowi funkcji przedstawionemu na rysunku i oceń prawdziwość podanych zdań.



W przedziale $(1; 7)$ funkcja jest stała.

☐ TAK ☐ NIE

Funkcja jest rosnąca dla $x < -7$.

☐ TAK ☐ NIE

W przedziale $(-3; 7)$ funkcja jest stała.

☐ TAK ☐ NIE

W przedziale $(-\infty; -5)$ funkcja jest malejąca.

☐ TAK ☐ NIE

W przedziale $(7; 12)$ funkcja jest malejąca.

☐ TAK ☐ NIE



MATERIAŁY DODATKOWE ZACZERPNIĘTE
Z BEZPŁATNEJ OBUDOWY DYDAKTYCZNEJ
M+, DO WYKORZYSTANIA PRZY REALIZA-
CJI DZIAŁU *FUNKCJE*

**ZNAJDŹ BŁĄD**

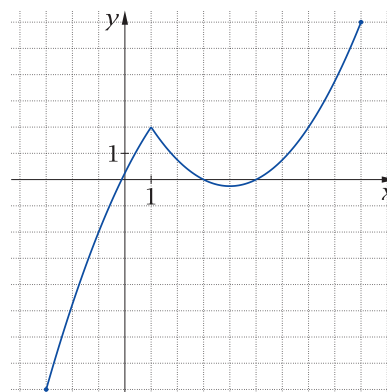
FUNKCJE



ZAKRES PODSTAWOWY

Zadanie 1. Na rysunku obok przedstawiono wykres pewnej funkcji. Michał podał kilka własności tej funkcji. Które z obserwacji Michała są błędne?

- A. Dziedziną funkcji jest przedział $\langle -3; 9 \rangle$.
- B. Zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle -6; 2 \rangle$.
- C. Wszystkie miejsca zerowe funkcji są dodatnie.
- D. Można znaleźć trzy różne argumenty, dla których funkcja przyjmuje takie same wartości.
- E. Największą wartością funkcji jest $y = 2$.
- F. Funkcja maleje dla dodatnich argumentów.
- G. Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla ujemnych argumentów.
- H. Wartość $y = 2$ jest jedyną, którą funkcja przyjmuje tylko dla dwóch argumentów.



Zadanie 2. Wiadomo, że funkcja $y = f(x)$ jest malejąca, a jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych. Pięcioro uczniów zapisało po jednym wniosku wynikającym z tej własności. Tylko jeden z tych wniosków jest prawdziwy. Który? Wyjaśnij, na czym polegają błędy w pozostałych wnioskach.

Kamil: Funkcja f na pewno przyjmuje tylko wartości ujemne.

Lidka: Dla dowolnego przedziału $\langle a; b \rangle$ zachodzi nierówność $f(a) > f(b)$.

Mateusz: Funkcja f musi mieć jedno miejsce zerowe.

Natalia: $f(98) > f\left(67\frac{4}{9}\right)$

Olek: Na pewno istnieje argument, dla którego wartość funkcji f jest równa -100 .

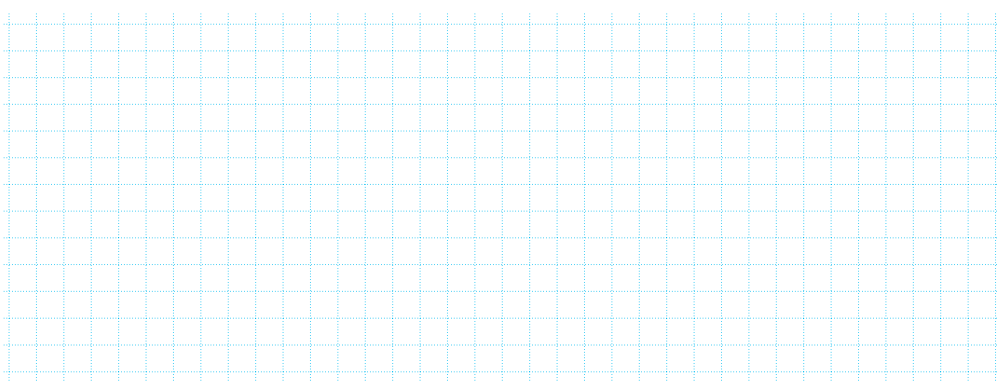


Zadanie 3. Trzej chłopcy tłumaczą, jak znaleźli współrzędne punktu, w którym wykres funkcji $f(x) = 4x + 5$ przecina oś x . Znajdź błędy w ich rozumowaniach. Przedstaw poprawne rozwiązanie.

Roman: Wykres funkcji $f(x) = 4x + 5$ przecina oś y w punkcie $(0, 5)$, a więc oś x przecina w punkcie $(4, 0)$.

Szymon: Miejsce zerowe można znaleźć, rozwiązując równanie $0 = 4x + 5$, a więc jest nim $x = \frac{4}{5}$. Wynika stąd, że wykres funkcji f przecina oś x w punkcie $(\frac{4}{5}, 0)$.

Tomasz: $f(-1,25) = 0$, więc wykres funkcji f przecina oś x w punkcie $(0, -1,25)$.



Zadanie 4. Które z poniższych zdań są fałszywe? Uzasadnij swoją odpowiedź.

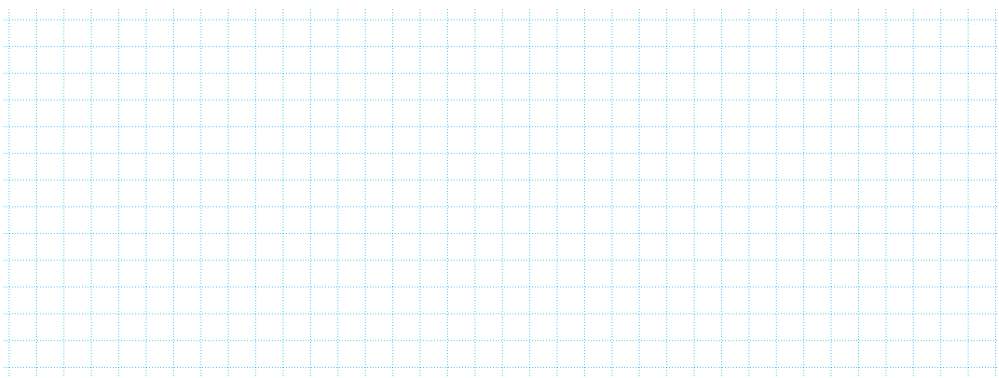
A. Oba współczynniki we wzorze funkcji $f(x) = -2x - 5$ są ujemne, więc funkcja ta przyjmuje wartości ujemne dla wszystkich argumentów.

B. Funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ jest rosnąca, a więc funkcja $g(x) = 2x - 3$ jest malejąca.

C. Funkcje $f(x) = 3x + 4$ i $g(x) = 4x + 3$ mają to samo miejsce zerowe.

D. Wykresy funkcji $f(x) = -8x - 4$ i $g(x) = -2x - 4$ przecinają się w punkcie leżącym na osi y .

E. Funkcja $f(x) = -6x + 9$ dla argumentów większych od 1 przyjmuje wartości większe od 3.



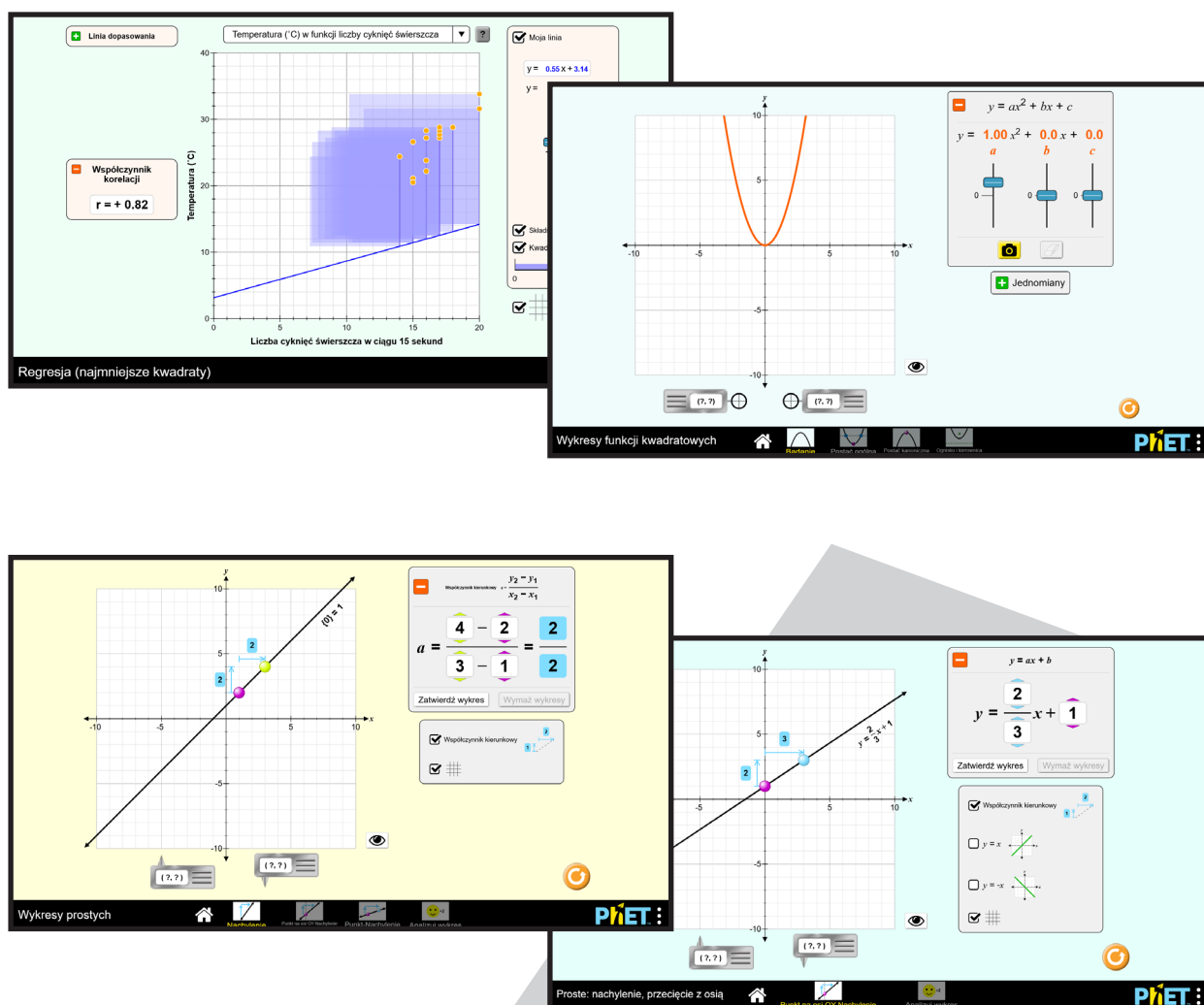
EKSPERYMENTARIUM Z PLUSEM

Ile jesteśmy w stanie trwale zapamiętać? Raptem jedną dziesiątą tego, co przeczytaliśmy. Połowę tego, co widzieliśmy lub słyszeliśmy. I niemal wszystko, bo aż 90% tego, co sami zrobiliśmy...

Eksperymentarium z plusem to seria interaktywnych animacji – tu się mnoży, buduje, a nawet strzela, czyli po prostu działa i uczy.

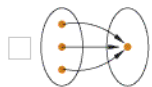
Wiadomości z działu *Funkcje* łatwiej zrozumieć, korzystając z animacji: *Wykresy prostych*, *Nachylenie*. *Przecięcie z osią* i *Prosta regresji*.

Znajdziesz je na eksperymentarium.gwo.pl.

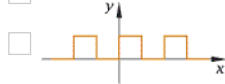


**Zadanie 1**

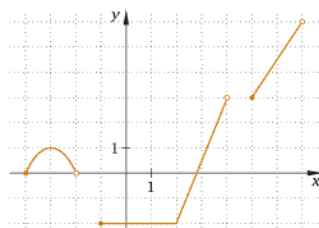
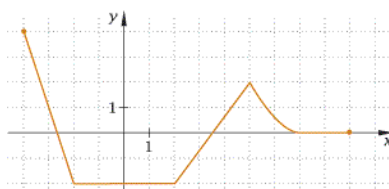
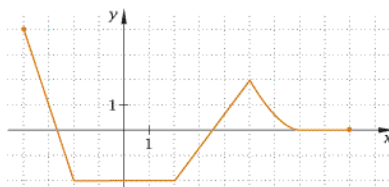
Które z poniższych przyporządkowań nie jest funkcją?

☐

x	-1	0	2	5
$f(x)$	-1	2	3	-4

☐ Każdej liczbie naturalnej przyporządkowano cyfrę dziesiątek tej liczby.**Zadanie 2**

Dziedziną funkcji przedstawionej na rysunku poniżej jest zbiór:

☐ $\langle -4; -2 \rangle \cup \langle -1; 4 \rangle \cup \langle 5; 7 \rangle$ ☐ $\langle -4; 7 \rangle$ ☐ $\langle -2; 6 \rangle$ ☐ $\langle -2; 6 \rangle$ **Zadanie 3**Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Które zdanie jest prawdziwe?☐ Funkcja f maleje w przedziale $\langle -4; 0 \rangle$ oraz $\langle 5; 7 \rangle$.☐ Dziedziną funkcji f jest zbiór $\langle -2; 4 \rangle$.☐ Funkcja f jest stała w przedziale $\langle -2; 9 \rangle$.☐ Funkcja f rośnie w przedziale $\langle 2; 5 \rangle$.**Zadanie 4**Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji f . Które zdanie jest fałszywe?☐ Różnica pomiędzy największą a najmniejszą wartością funkcji f jest równa 6.☐ Wartości funkcji f należą do zbioru $\langle -2; 4 \rangle$.☐ Funkcja f przyjmuje wartość -2 dokładnie dla dwóch argumentów.☐ Największą wartość funkcja f przyjmuje dla argumentu -4 .

**Zadanie 5**

Funkcja liniowa przechodząca przez punkty $C = (0, -2)$ i $D = (1, -3\frac{1}{4})$ ma wzór:

- ☐ $y = 1\frac{1}{4}x + 2$
☐ $y = 1\frac{1}{4}x - 2$
☐ $y = -1\frac{1}{4}x - 2$
☐ $y = -1\frac{1}{4}x + 2$

Zadanie 6

Funkcja liniowa, której wykres przechodzi przez punkt $A = (-\frac{1}{2}, 2)$ i jest równoległy do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{2}x + 1$, ma wzór:

- ☐ $y = -\frac{1}{2}x - 1\frac{3}{4}$
☐ $y = \frac{1}{2}x - 1\frac{3}{4}$
☐ $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{3}{4}$
☐ $y = \frac{1}{2}x + 1\frac{3}{4}$

Zadanie 7

Dla jakich argumentów wartości funkcji $h(x) = -\frac{1}{3}x - 1$ są niedodatnie?

- ☐ dla $x > -3$
☐ dla $x < -3$
☐ dla $x \geq -3$
☐ dla $x \leq -3$

Zadanie 8

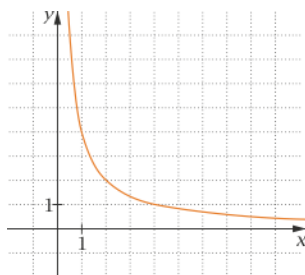
Podane w poniższej tabeli wielkości są wprost proporcjonalne. Zatem "a" wynosi:

x	3	7
y	5	a

- ☐ 4,2
☐ $2\frac{1}{7}$
☐ $11\frac{2}{3}$
☐ 9

Zadanie 9

Poniższy wykres przedstawia zależność między długościami przyprostokątnych x i y trójkąta prostokątnego o pewnym polu P . Które zdanie jest fałszywe?



- ☐ Zależność pomiędzy x i y można opisać wzorem $xy = 4$.
☐ Dla $x = 2$ trójkąt jest równoramienny.
☐ Wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne.
☐ Pole tego trójkąta wynosi 4.

Zadanie 10

Funkcja f opisuje zależność pomiędzy wielkościami wprost proporcjonalnymi, a jej wykres przechodzi przez punkt $(3, 1)$. Który z poniższych wzorów opisuje funkcję f ?

- ☐ $y = \frac{3}{x}$
☐ $y = x - 2$
☐ $y = -\frac{2}{3}x$
☐ $y = \frac{1}{3}x$



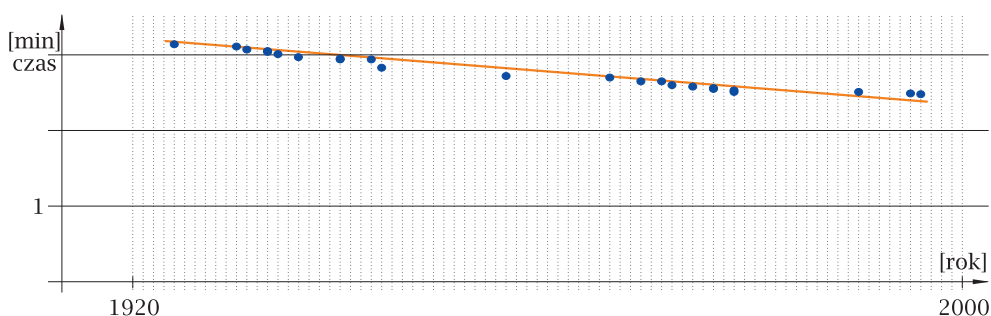
PROSTA REGRESJI

Matematycy często pomagają specjalistom z innych dziedzin. Bywa, że oczekuje się od nich, by na podstawie zebranych danych znaleźli zależność między dwiema wielkościami. Mogą wówczas posłużyć się tzw. metodą regresji. Oto przykład zastosowania tej metody.

Tabela pokazuje, jak zmieniał się rekord świata w biegu na 1000 m kobiet.

Rekordzistka	Rok	Czas min:sek	Czas min	Rekordzistka	Rok	Czas min:sek	Czas min
E. Trickey (W. Brytania)	1924	3 : 08.2	3,14	V. Mukhanova (ZSRR)	1966	2 : 43.3	2,72
L. Radke (Niemcy)	1930	3 : 06.6	3,11	W. Pohland (NRD)	1969	2 : 42.1	2,70
G. Lunn (W. Brytania)	1931	3 : 04.4	3,07	R. Kleinau (NRD)	1971	2 : 38.8	2,65
Z. Kubkova (Czechosł.)	1933	3 : 03.0	3,05	G. Hoffmeister (NRD)	1972	2 : 35.9	2,60
S. Walasiewicz (Polska)	1933	3 : 02.5	3,04	K. Krebs (NRD)	1974	2 : 35.0	2,58
G. Lunn (W. Brytania)	1934	3 : 00.6	3,01	N. Shtereva (Bułgaria)	1976	2 : 33.8	2,56
Y. Vasilyeva (ZSRR)	1936	2 : 58.4	2,97	T. Sorokina (ZSRR)	1976	2 : 32.8	2,55
Y. Vasilyeva (ZSRR)	1940	2 : 58.1	2,97	U. Bruns (NRD)	1978	2 : 32.0	2,53
V. Andreyeva (ZSRR)	1940	2 : 57.1	2,95	T. Providokhina (ZSRR)	1978	2 : 30.6	2,51
Y. Vasilyeva (ZSRR)	1943	2 : 56.9	2,95	C. Wachtel (NRD)	1990	2 : 30.67	2,51
Y. Vasilyeva (ZSRR)	1944	2 : 52.6	2,88	M. Mutola (Mozambik)	1995	2 : 29.34	2,49
E. Buda (Rumunia)	1956	2 : 50.2	2,84	S. Masterkova (Rosja)	1996	2 : 28.98	2,48

Rok i odpowiadający mu czas (w minutach) tworzą parę liczb, którą można potraktować jako współrzędne punktu. Na przykład w roku 1924 rekord świata wynosił 3,14 minuty i tej parze danych odpowiada punkt o współrzędnych (1924, 3,14). Punkty zaznaczone na poniższym rysunku odpowiadają danym z tabelki. Można zaobserwować, że punkty te układają się wzdłuż linii prostej. Na rysunku zaznaczono taką prostą, która wydaje się leżeć najbliżej tych punktów.

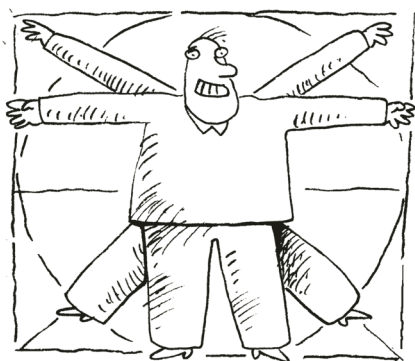


Uwaga. Istnieją skomplikowane metody, które pozwalają ustalić położenie prostej przebiegającej jak najbliżej zaznaczonych punktów. (Prosta otrzymana w ten sposób nazywana jest prostą regresji). W tej pracy badawczej nie trzeba się posługiwać tymi metodami, wystarczy rysować prostą „na oko”.



1. Wybierz dwa dowolne punkty, które leżą na narysowanej prostej i ustal ich współrzędne. Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez te dwa punkty.
2. Posługując się otrzymanym wzorem, można prognozować, jakie wyniki będą osiągały w przyszłości rekordzistki świata w biegu na 1000 m. Jakiego rekordu świata w biegu kobiet na 1000 m można się spodziewać w roku 2030? W którym roku można się spodziewać rekordu poniżej 2 minut?
3. W poniższej tabeli podano wyniki rekordzistów świata w biegu na 1000 m mężczyzn. Wyraź te wyniki w minutach, znajdź prostą regresji, spróbuj opisać, jak będą zmieniały się w przyszłości wyniki rekordzistów świata w biegu na 1000 m.

Rekordzista	Rok	Czas min:sek	Rekordzista	Rok	Czas min:sek
E. Lunghi (Włochy)	1908	2 : 31.0	A. Boysen (Norwegia)	1954	2 : 19.5
S. Lundgren (Szwecja)	1918	2 : 31.0	A. Boysen (Norwegia)	1955	2 : 19.0
A. Bolin (Szwecja)	1918	2 : 29.1	I. Rozsavolgyi (Węgry)	1955	2 : 19.0
S. Lundgren (Szwecja)	1922	2 : 28.6	D. Waern (Szwecja)	1958	2 : 18.1
G. Baraton (Francja)	1926	2 : 27.2	D. Waern (Szwecja)	1959	2 : 18.0
S. Martin (Francja)	1926	2 : 26.8	D. Waern (Szwecja)	1959	2 : 17.8
O. Peltzer (Niemcy)	1927	2 : 25.8	S. Valentin (NRD)	1960	2 : 16.7
J. Ladoumègue (Francja)	1930	2 : 23.6	P. Snell (Nowa Zelandia)	1964	2 : 16.6
R. Harbig (Niemcy)	1941	2 : 21.5	J. May (NRD)	1965	2 : 16.2
R. Gustafsson (Szwecja)	1946	2 : 21.4	F. Kemper (RFN)	1966	2 : 16.2
M. Hansenne (Francja)	1948	2 : 21.4	D. Malan (RPA)	1973	2 : 16.0
O. Aberg (Szwecja)	1952	2 : 21.3	R. Wohlhuter (USA)	1974	2 : 13.9
S. Jungwirth (Czechosł.)	1952	2 : 21.2	S. Coe (W. Brytania)	1980	2 : 13.40
M. Whitfield (USA)	1953	2 : 20.8	S. Coe (W. Brytania)	1981	2 : 12.18
A. Boysen (Norwegia)	1953	2 : 20.4	N. Ngeny (Kenia)	1999	2 : 11.96



Co dalej?

Zbierz dane dotyczące wzrostu i rozpiętości ramion co najmniej dwudziestu osób. Korzystając z metody regresji, znajdź zależność między tymi wielkościami.

Uwaga. Jeśli masz kalkulator graficzny (lub komputer z odpowiednim oprogramowaniem), to posługując się nim, możesz łatwo otrzymać wzór odpowiedniej funkcji.

Multipodręczniki dla klas 1 i 2

– zakresy podstawowy i rozszerzony

Dopasowane do umiejętności uczniów
po 8-klasowej szkole podstawowej?
Kształcą umiejętność budowania
modeli? Dawkują wiadomości
w łatwo przyswajalnych
porcjach?
Sprawdź.



Twój kod dostępu:

MASZ-NOWY-PODR

1. Wejdź na www.wpiszkod.gwo.pl.
2. Zaloguj się lub najpierw zarejestruj, jeśli nigdy wcześniej nie rejestrowałeś się na www.gwo.pl.
3. Wpisz kod. Wpisujesz go tylko raz, potem przeglądasz podręczniki, logując się na www.gwo.pl (panel „Moje GWO, zakładka „Multipodręczniki”).



Książki możesz przeglądać przez 30 dni od pierwszego uruchomienia. Kod jest ważny do 30 czerwca 2021 r.



Interaktywne zadania
z matematyki dla liceum i technikum



Poznaj program online, który ułatwi Twoim uczniom:

- samodzielne opanowanie podstawowych umiejętności matematycznych,
- przygotowanie się do klasówek,
- poprawienie ocen.



ponad 640
interaktywnych zadań
ze zmiennymi danymi



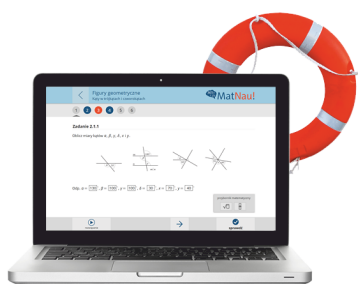
filmy i komentarze
z rozwiązaniami
krok po kroku



na komputer
i tablicę interaktywną



idealna pomoc
podczas zajęć w klasie,
a także lekcji zdalnych



Chcesz **bezpłatnie** wypróbować *MatNau!*
ze swoimi uczniami?

Napisz do nas na **kontakt@gwo.pl**.

Więcej informacji o programie na **matnau.gwo.pl**.