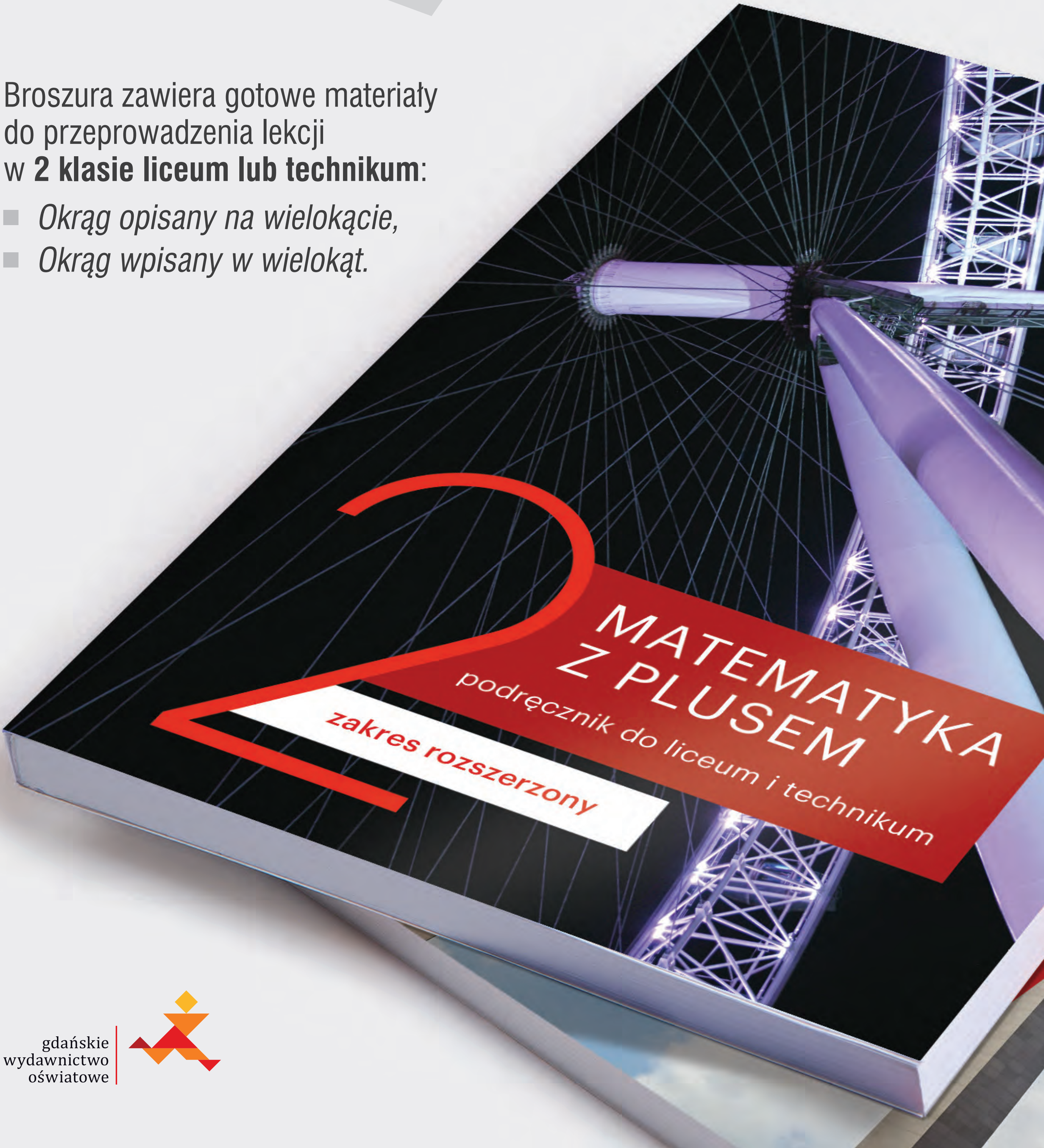
JAK SIĘ UCZY Z *M+*?

SPRAWDŹ NAS!

matematyka M+ z plusem

Broszura zawiera gotowe materiały do przeprowadzenia lekcji w **2 klasie liceum lub technikum**:

- *Okrąg opisany na wielokącie,*
- *Okrąg wpisany w wielokąt.*



gdańskie wydawnictwo oświatowe

Wstęp

Oddajemy w Państwa ręce zestaw materiałów, który umożliwia przeprowadzenie wraz z uczniami z 2 klasy liceum lub technikum (kształcących się wg podstawy dla zakresu rozszerzonego) zajęć z dwóch tematów działu *Figury na płaszczyźnie*:

- *Okrąg opisany na wielokącie,*
- *Okrąg wpisany w wielokąt.*

Do realizacji wskazanych zagadnień przygotowaliśmy odpowiednie fragmenty podręcznika oraz zbioru zadań. Ów zestaw poszerzyliśmy o dodatkowe pomoce – materiały dydaktyczne z bogatych zasobów udostępnianych bezpłatnie członkom klubu $M+$.

Lekcje z wykopem – scenariusze niebanalnych zajęć lekcyjnych, które na długo zostaną w głowach uczniów. Punktem wyjścia jest ciekawy, niebanalny problem lub historia, która wydarzyła się naprawdę. Autorzy wyjaśniają zagadnienia matematyczne, wykorzystując dostępne przeciętnemu uczniowi narzędzia. Podążanie za proponowanym tokiem wykładu, odkrywanie tajemnicy sprawia, że lekcja zostaje na bardzo, bardzo długo w głowach uczniów.

Znajdź błąd – psychologia poznawcza podpowiada, że nauka na błędach (swoich bądź cudzych) to metoda z olbrzymim potencjałem do wykorzystania w edukacji dzieci i młodzieży. Przygotowane przez nas zestawy zadań ów fakt wykorzystują. Zadaniem uczniów jest wskazanie błędu w prezentowanych rozwiązaniach i skorygowanie go. Oczywiście błędy nie są zwykłymi pomyłkami rachunkowymi – weryfikujemy nimi zrozumienie zagadnień matematycznych przez Państwa podopiecznych.

Test do samodzielnej weryfikacji – wszyscy uczniowie mają dostęp do interaktywnych testów w Strefie ucznia **www.gwo.pl/strefa-ucznia**. To materiał, który wielu wykorzystuje do ostatnich przygotowań przed zbliżającymi się klasówkami. Chcemy pokazać go, gdyż w szybki, prosty i rzetelny sposób pozwala zweryfikować swoją wiedzę i umiejętności.

Mądre projekty – każdemu nauczycielowi zdarza się spotkać uczniów bardziej dociekliwych. Przygotowany materiał pozwala rozwijać potencjał takich właśnie osób – samodzielnie mogą zastosować zdobytą już wiedzę i umiejętności do bardziej złożonych zagadnień.

Wśród propozycji materiałów znajdują się także karty pracy stworzone przy wykorzystaniu *Kompozytora klasówek i kart pracy* – programu komputerowego służącego do szybkiego układania, zapisywania i drukowania różnych zestawów zadań z matematyki (w kilku wariantach). Zadania można dobierać m.in. według stopnia trudności oraz czasu potrzebnego na ich rozwiązanie. Do każdego zestawu zadań dołączony jest klucz odpowiedzi. Zachęcamy, aby wypróbować wersję demonstracyjną programu, odwiedzając stronę **www.matematyka.kompozytorklasowek.gwo.pl**.

Zdecydowaliśmy się także na zwrócenie Państwa uwagi na program *MatNau!* – interaktywny zbiór zadań z rozwiązaniami. Wchodząc na wskazaną stronę, otrzymają Państwo dostęp do wersji demonstracyjnej programu, który ma dwa oblicza. Dla nauczycieli to interaktywny zbiór zadań (do zakresu podstawowego). Szczególnie przydatny dla tych z Państwa, którzy lubią (i mają możliwość) wykorzystywać na lekcjach nowoczesne technologie. Dla ucznia to aplikacja, która motywuje do powtórek przed sprawdzianami i pomaga poprawić oceny z matematyki. Za pomocą krótkich filmów i komentarzy wyjaśnia krok po kroku, jak rozwiązywać różne typy zadań. Dodatkowo uczniowie mogą sprawdzić swoje umiejętności, wykonując interaktywne ćwiczenia.

Zapraszamy do wypróbowania *Matematyki z plusem* w czasie zajęć z uczniami. Wszystkich zainteresowanych naszymi propozycjami dydaktycznymi zachęcamy do odwiedzenia strony **www.matematyka.gwo.pl**.

Okrąg opisany na wielokącie

Okrąg wpisany w wielokąt

Karty pracy z *Kompozytora klasówek i kart pracy*

Materiały dodatkowe do wykorzystania przy realizacji działu *Figury na płaszczyźnie*

MATERIAŁY DO LEKCJI POŚWIĘCONYCH POJĘCIU OKRĄG OPISANY NA WIELOKĄCIE

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

zadanie 7–10 — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii

— odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem

— zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)

— zadanie trudne

W zbiorze zadań przyjęto następujące oznaczenia:

12. — zadanie łatwe

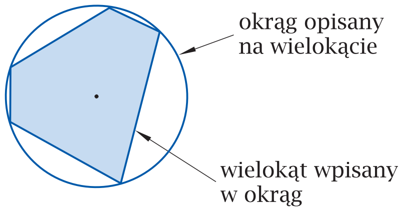
12. — zadanieo średnim poziomie trudności

12. — zadanie trudne

R — zadanie z zakresu rozszerzonego

OKRĄG OPISANY NA WIELOKĄCIE

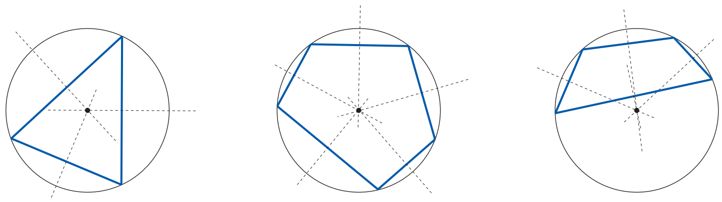
I



Mówimy, że **okrąg jest opisany na wielokącie**, gdy wszystkie wierzchołki tego wielokąta leżą na okręgu.

Jeżeli okrąg jest opisany na wielokącie, to możemy też powiedzieć, że wielokąt jest wpisany w okrąg.

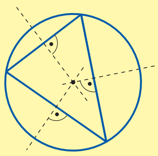
Środek okręgu opisanego na wielokącie jest punktem jednakowo odległym od jego wierzchołków. Z własności symetralnej (por. s. 71) wynika, że środek ten musi leżeć na symetralnej każdego boku wielokąta.

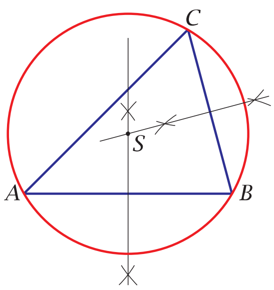


Wiemy już, że symetralne trzech boków każdego trójkąta przecinają się w jednym punkcie (por. s. 71). Wynika stąd następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Na każdym trójkącie można opisać okrąg. Środkiem takiego okręgu jest punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta.

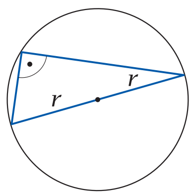




Aby wyznaczyć konstrukcyjnie środek okręgu opisanego na trójkącie, wystarczy poprowadzić symetralne dwóch boków trójkąta. Ich punkt przecięcia to środek szukanego okręgu, a odległość tego punktu od dowolnego wierzchołka trójkąta to promień okręgu.

ĆWICZENIE A Narysuj trójkąt i skonstruuj okrąg opisany na tym trójkącie.

Zauważ, że z własności kątów środkowych i wpisanych wynika, że środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest środkiem przeciwprostokątnej.



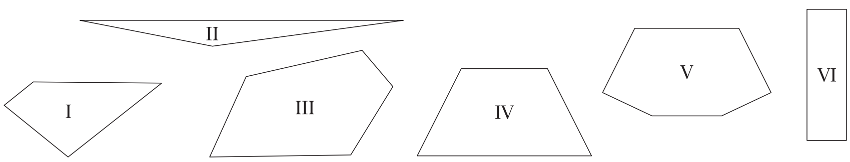
ĆWICZENIE B a) Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 4 i 5.

b) Oblicz długości boków trójkąta prostokątnego równoramiennego wpisanego w okrąg o promieniu 20.

zadania 1–4

II Nie na każdym wielokącie można opisać okrąg. Możliwe jest to tylko wówczas, gdy symetralne wszystkich jego boków przecinają się w jednym punkcie. Na przykład okręgu nie można opisać na równoległoboku, który nie jest prostokątem.

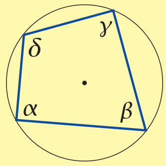
ĆWICZENIE C Na których z narysowanych wielokątów na pewno nie można opisać okręgu?



Warunek, jaki musi spełniać czworokąt, na którym da się opisać okrąg, opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

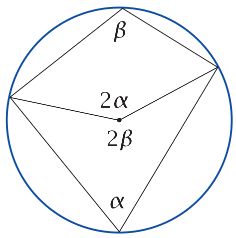
Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów są równe.



$$\boldsymbol{\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ}$$

Dowód

Wykażemy najpierw, że jeśli na pewnym czworokącie można opisać okrąg, to suma miar przeciwległych kątów tego czworokąta wynosi 180°.

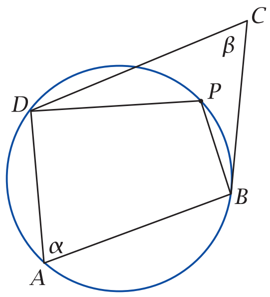


Oznaczmy przez α i β przeciwległe kąty czworokąta wpisanego w okrąg (zob. rysunek). Kąty środkowe oparte na tych samych łukach co kąty α i β mają odpowiednio miary 2α i 2β oraz $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$. Stąd $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Z twierdzenia o sumie miar kątów czworokąta wynika, że suma pozostałych dwóch kątów rozważanego czworokąta także wynosi 180°.

Wykażemy teraz, że jeśli w czworokącie suma miar przeciwległych kątów wynosi 180°, to na tym czworokącie można opisać okrąg.

Przyjmijmy, że w czworokącie $ABCD$ dane są: $|\sphericalangle BAD| = \alpha$, $|\sphericalangle BCD| = \beta$ oraz $\alpha + \beta = 180^\circ$ (zob. rysunek).



Zauważmy, że wszystkie kąty czworokąta $ABCD$ są wypukłe, więc punkt C leży wewnątrz kąta α.

Rozważmy okrąg opisany na trójkącie ABD. Przypuśćmy, że odległość punktu C od środka tego okręgu jest większa niż promień okręgu.

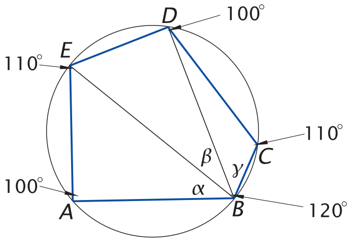
Niech P będzie punktem leżącym na łuku okręgu, na którym oparty jest kąt α, oraz $P \neq B$ i $P \neq D$. Wówczas kąt wpisany BPD ma miarę $180^\circ - \alpha$ i wobec tego w czworokącie $BCDP$ suma miar kątów o wierzchołkach P i C wynosiłaby:

$$|\sphericalangle BPD| + |\sphericalangle BCD| = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) + \beta = 180^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

Taki czworokąt nie może istnieć, zatem odległość punktu C od środka okręgu opisanego na trójkącie ABD nie jest większa niż promień tego okręgu.

Analogicznie można wykazać, że odległość punktu C od środka rozważanego okręgu nie może być też mniejsza niż promień okręgu. Punkt C musi więc leżeć na tym okręgu, czyli jest to okrąg opisany na czworokącie $ABCD$. □

PRZYKŁAD Kolejne kąty pięciokąta wpisanego w okrąg mają miary: 100°, 120°, 110°, 100° i 110°. W pięciokącie tym poprowadzono przekątne wychodzące z wierzchołka kąta o mierze 120°. Na jakie kąty przekątne te podzieliły ten kąt?



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

$\alpha + \beta + 110° = 180°$

$\alpha + \beta = 70°$

Czworokąt $ABDE$ jest wpisany w okrąg, więc $|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle AED| = 180°$.

$\gamma = 120° - (\alpha + \beta) = 120° - 70° = 50°$

$|\sphericalangle ABC| = \alpha + \beta + \gamma = 120°$

$\beta + \gamma + 100° = 180°$

$\beta + \gamma = 80°$

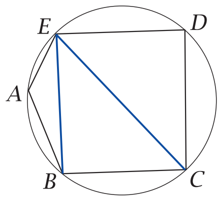
$\beta = 80° - \gamma = 80° - 50° = 30°$

Czworokąt $BCDE$ jest wpisany w okrąg, więc $|\sphericalangle CBE| + |\sphericalangle CDE| = 180°$.

$\alpha = 120° - (\beta + \gamma) = 120° - 80° = 40°$

Odp. Przekątne dzielą kąt o mierze 120° na kąty o miarach 40°, 30° i 50°.

ZADANIE Dane są miary kątów pięciokąta $ABCDE$ wpisanego w okrąg: $|\sphericalangle ABC| = 110°$, $|\sphericalangle BCD| = 95°$, $|\sphericalangle CDE| = 85°$, $|\sphericalangle DEA| = 120°$, $|\sphericalangle EAB| = 130°$. Znajdź miarę kąta BEC.



zadania 5–15

ZESTAW ZADAŃ

1. Ustal, czy środek okręgu opisanego na trójkącie należy do trójkąta, gdy miary dwóch kątów trójkąta wynoszą:

a) 39° i 47° **b)** 70° i 55° **c)** 63° i 27°

2. **a)** Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych długości 5 i 12.

b) W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 i 8. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego ze środkiem przeciwprostokątnej.

3. Które z podanych zdań są prawdziwe?

① *Środek okręgu opisanego na trójkącie leży zawsze na przecięciu prostych zawierających wysokości tego trójkąta.*

② *Środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.*

③ *Dla dowolnych trzech punktów niewspółliniowych można narysować okrąg, który przechodzi przez te punkty.*

④ *Każdy bok trójkąta ostrokątnego wpisanego w okrąg jest krótszy od średnicy tego okręgu.*

⑤ *Każdy bok trójkąta rozwartokątnego wpisanego w okrąg jest krótszy od średnicy tego okręgu.*

4. Ostrokątny trójkąt równoramienny, którego podstawa ma 4 cm, jest wpisany w okrąg o promieniu 3 cm. Oblicz pole tego trójkąta.

I **5. a)** Oblicz promień okręgu opisanego na prostokącie o bokach 5 cm i 12 cm.

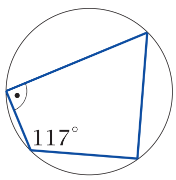
b) Oblicz długość boku kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 5 cm.

6. Sprawdź, czy można opisać okrąg na czworokącie, którego kolejne kąty mają podane miary:

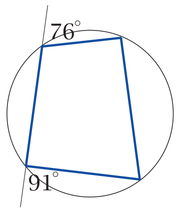
a) 30°, 60°, 150°, 120° **b)** 64°, 126°, 56°, 114° **c)** 91°, 92°, 89°, 88°

7. Oblicz miary kątów narysowanego czworokąta.

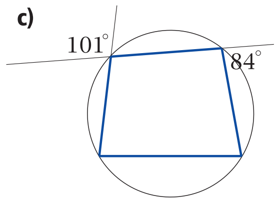
a)



b)



c)

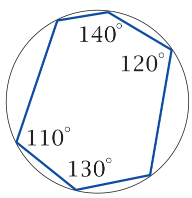


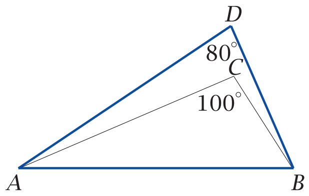
8. a) Czy czworokąt wpisany w okrąg może mieć dokładnie trzy kąty ostre?

b) Pewne dwa kąty czworokąta wpisanego w okrąg mają miary 98° i 82°. Ustal, jakie miary mogą mieć pozostałe kąty tego czworokąta.

9. Uzasadnij, że na trapezie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy trapez ten jest równoramienny.

10. W sześciokącie narysowanym obok dane są cztery kąty. Oblicz miary pozostałych kątów tego sześciokąta.



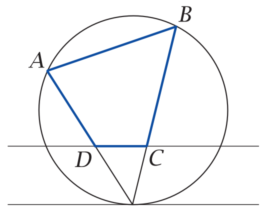


11. Na rysunku obok przedstawiono trójkąty ABC i ABD. Uzasadnij, że okrąg opisany na trójkącie ABC ma taki sam promień, jak okrąg opisany na trójkącie ABD.

12. Miary kątów pewnego czworokąta wyrażone w stopniach są kolejnymi liczbami nieparzystymi. Czy na tym czworokącie można opisać okrąg?

13. Punkt P jest symetryczny do ortocentrum trójkąta ABC względem prostej AB. Udowodnij, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

14. Popatrz na rysunek. Z trójkąta wpisanego w okrąg odcinamy jeden róg prostą równoległą do stycznej poprowadzonej przez wierzchołek. Udowodnij, że na otrzymanym w ten sposób czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.



15. Udowodnij, że jeśli dwusieczne wszystkich kątów czworokąta przecinają się w czterech punktach, to punkty te tworzą czworokąt, na którym można opisać okrąg.

MINISPRAWDZIAN

S1. Jakie pole ma trójkąt prostokątny równoramienny wpisany w okrąg o promieniu 14 cm?

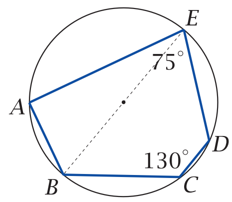
A. 196 cm^2 B. 292 cm^2 C. 584 cm^2 D. 98 cm^2

S2. Oblicz miarę największego kąta czworokąta wpisanego w okrąg, jeśli miary pozostałych jego kątów wynoszą α, 2α i 6α.

A. 240° B. 22,5° C. ok. 154° D. 157,5°

S3. Przekątna BE dzieli pięciokąt $ABCDE$ na trójkąt i trapez równoramienny. Środek okręgu opisanego na tym pięciokącie leży na tej przekątnej. Oblicz miarę kąta ABC, jeśli $|\sphericalangle BCD| = 130°$ oraz $|\sphericalangle AED| = 75°$.

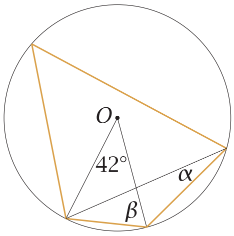
A. 105° B. 115° C. 130° D. 150°



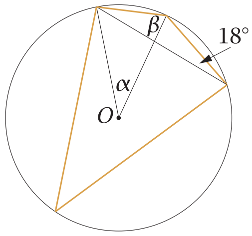
OKRĄG OPISANY NA WIELOKĄCIE

117. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na narysowanym wielokącie. Znajdź miary kątów α i β.

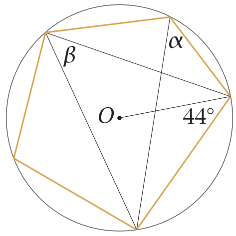
a)



b)



c)

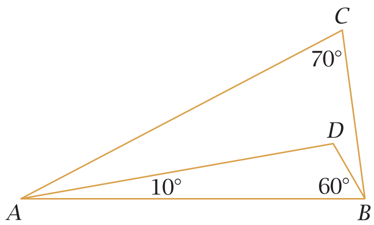


118. a) Na pewnym czworokącie opisano okrąg o promieniu 10. Jeden z boków tego czworokąta ma długość 6. Oblicz odległość środka okręgu od tego boku.

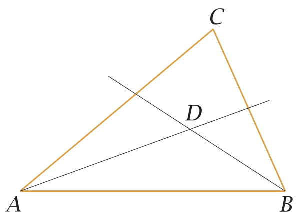
b) Jeden z boków czworokąta ma długość 8. Odległość środka okręgu opisanego na tym czworokącie od tego boku jest równa 2. Jaką długość ma promień okręgu?

119. Wyjaśnij, dlaczego na każdym trapezie równoramiennym można opisać okrąg.

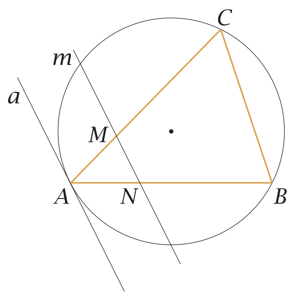
120. a) Wyjaśnij, dlaczego okręgi opisane na trójkątach ABC i ABD mają równe promienie.



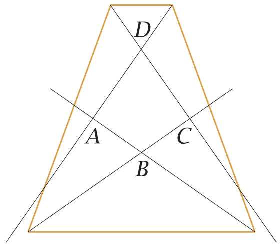
b) Półproste AD i BD są dwusiecznymi kątów trójkąta ABC. Okręgi opisane na trójkątach ABC i ABD mają taki sam promień. Znajdź miarę kąta ACB.



121. Na trójkącie ABC opisano okrąg, przez wierzchołek A poprowadzono prostą a styczną do okręgu, a następnie poprowadzono prostą m równoległą do a przecinającą dwa boki trójkąta w punktach M i N. Wykaż, że na czworokącie $BCMN$ można opisać okrąg.



122. Kwadrat wpisano w okrąg o promieniu r. Wykaż, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu na tym okręgu od wszystkich wierzchołków kwadratu jest równa $8r^2$.



123. Punkty A, B, C i D na rysunku obok to punkty przecięcia dwusiecznych kątów trapezu równoramiennego. Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

124. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Przez punkt A poprowadzono prostą, która przecięła jeden okrąg w punkcie C, a drugi — w punkcie D. Styczne do okręgów w punktach C i D przecięły się w punkcie E. Wykaż, że na czworokącie $BDEC$ można opisać okrąg.

125. a) Znajdź promień okręgu opisanego na trapezie równoramiennym o ramieniu długości $\sqrt{10}$ i o podstawach długości 4 i 6.

b) Dwie cięciwy okręgu o promieniu 5 są równoległe i jedna z nich jest o 2 dłuższa od drugiej. Odległość między tymi cięciwami jest równa 1. Oblicz długości tych cięciw.

126. Podstawami trapezu $ABCD$ są odcinki AB i CD. Ramię BC ma długość a, a odcinki AB, AC i AD mają jednakową długość równą b. Oblicz długość przekątnej BD trapezu i podaj warunek, jaki muszą spełniać a i b, aby zadanie miało rozwiązanie.

127. Punkt P jest ortocentrum pewnego trójkąta ostrokątnego. Wykaż, że punkty symetryczne do punktu P względem boków tego trójkąta leżą na okręgu opisanym na tym trójkącie.

128. Wyjaśnij, dlaczego sześciokąt wpisany w okrąg nie może mieć trzech kątów prostych.

129. Dany jest okrąg i dwa odcinki o długościach krótszych niż średnica okręgu. Skonstruuj trapez wpisany w dany okrąg o podstawach, których długości są równe długościom danych odcinków.

MATERIAŁY DO LEKCJI POŚWIĘCONYCH POJĘCIU OKRĄG WPISANY W WIELOKĄT

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

zadanie 7–10 — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii

III — odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem III

● — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)

● — zadanie trudne

W zbiorze zadań przyjęto następujące oznaczenia:

12. — zadanie łatwe

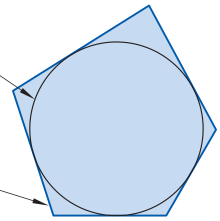
12. — zadanieo średnim poziomie trudności

12. — zadanie trudne

R — zadanie z zakresu rozszerzonego

OKRĄG WPISANY W WIELOKĄT

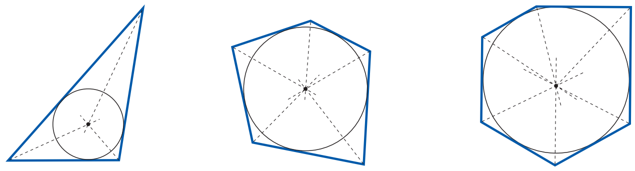
I



Mówimy, że **okrąg jest wpisany w wielokąt**, jeżeli jest styczny do wszystkich boków tego wielokąta.

Jeżeli okrąg jest wpisany w wielokąt, to możemy też powiedzieć, że wielokąt jest opisany na okręgu.

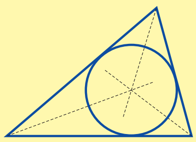
Odległość środka okręgu wpisanego w wielokąt od każdego boku wielokąta jest równa promieniowi okręgu. Środek takiego okręgu jest jednakowo odległy od wszystkich jego boków, zatem z własności dwusiecznej (por. s. 72) wynika, że środek ten musi leżeć na dwusiecznej każdego kąta wielokąta.



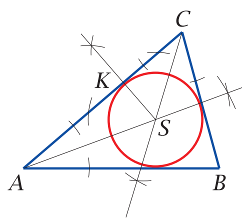
Ponieważ wiemy już, że dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie, zatem prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie

W każdy trójkąt można wpisać okrąg.
Środkiem okręgu wpisanego w trójkąt jest punkt przecięcia dwusiecznych kątów tego trójkąta.



Aby skonstruować okrąg wpisany w trójkąt, prowadzimy dwusieczne dwóch dowolnych kątów trójkąta, ich wspólny punkt S będzie środkiem szukanego okręgu. Następnie kreślimy prostą przechodzącą przez punkt S i prostopadłą do jednego z boków. Punkt przecięcia tej prostej z bokiem AC (na rysunku oznaczony literą K) jest jednym z punktów styczności. Kreślimy okrąg o środku S i promieniu $|SK|$.

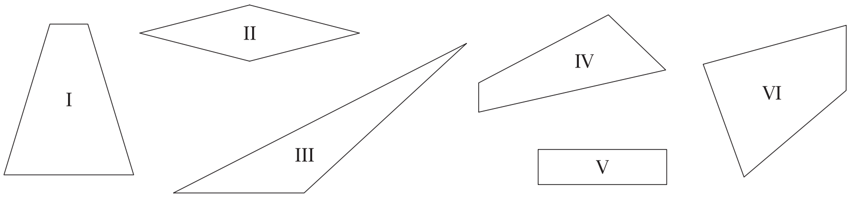


ĆWICZENIE A Narysuj trójkąt i skonstruuj okrąg wpisany w ten trójkąt.

zadania 1–6

II Nie w każdy wielokąt da się wpisać okrąg. Możliwe jest to tylko wtedy, gdy dwusieczne wszystkich kątów przecinają się w jednym punkcie. Na przykład nie można wpisać okręgu w prostokąt, który nie jest kwadratem.

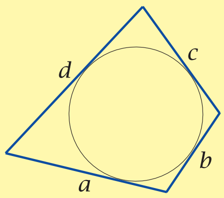
ĆWICZENIE B W które z narysowanych wielokątów na pewno nie można wpisać okręgu?



Warunek jaki musi spełniać czworokąt opisany na okręgu jest następujący:

Twierdzenie

W czworokąt można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt jest wypukły i sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

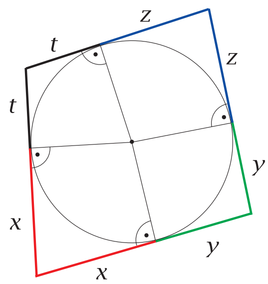


$$a + c = b + d$$

Dowód

Załóżmy, że w pewien czworokąt można wpisać okrąg. Taki czworokąt musi być wypukły, bo nie może mieć kątów większych od 180°. Pokażemy, że sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

Boki czworokąta są styczne do okręgu. Z własności stycznej do okręgu (zob. str. 151) wynika, że odcinki łączące dany wierzchołek z punktami styczności są równe (zob. rysunek).

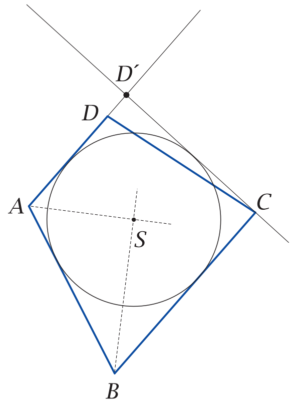


Łatwo zauważyć, że niezależnie od tego, którą parę przeciwległych boków czworokąta wybierzemy, suma ich długości wynosi $x + y + z + t$, czyli sumy długości przeciwległych boków są równe.

Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, w którym sumy długości przeciwległych boków są równe, czyli $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$. Pokażemy, metodą nie wprost, że w ten czworokąt można wpisać okrąg.

Niech S oznacza punkt przecięcia dwusiecznych kątów BAD i ABC i okrąg o środku S jest styczny do boków AB, BC i AD (zob. rys. na następnej stronie). Przypuśćmy, że okrąg ten nie jest styczny do boku CD.

Prowadząc z punktu C styczną do narysowanego okręgu, otrzymamy na prostej AD punkt D' różny od D. Możemy założyć, że $|AD'| > |AD|$ (gdyby $|AD'| < |AD|$, dowód przebiegałby analogicznie), czyli punkty C, D, D' powinny być wierzchołkami trójkąta.



Czworokąt $ABCD'$ jest opisany na okręgu, więc:
$|AD'| + |BC| = |AB| + |CD'|$

Zakładaliśmy, że spełniony jest także warunek:
$|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$

Z obu tych warunków wynika równość:
$|AD'| - |AD| = |CD'| - |CD|$

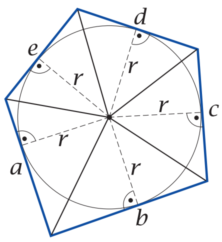
$|AD'| - |AD| = |DD'|$, więc $|DD'| = |CD'| - |CD|$.

Stąd $|DD'| + |CD| = |CD'|$.

Zatem odcinki CD, DD', $D'C$ nie spełniają nierówności trójkąta, czyli nie istnieje trójkąt o wierzchołkach C, D, D' (sprzeczność). Wobec tego $D = D'$, czyli czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu. □

zadania 7–11

III Pokażemy teraz, jak można obliczyć pole wielokąta opisanego na okręgu, gdy znamy długość promienia tego okręgu i obwód wielokąta.



Na rysunku obok pięciokąt opisany na okręgu został podzielony na trójkąty odcinkami łączącymi wierzchołki ze środkiem okręgu. Pole wielokąta jest równe sumie pól tych trójkątów:

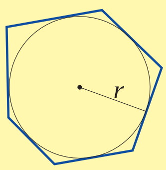
$$P = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}dr + \frac{1}{2}er$$

$$P = \frac{1}{2}r(a + b + c + d + e)$$

Powyższe rozumowanie przeprowadziliśmy dla pięciokąta. Analogiczne rozumowanie moglibyśmy przeprowadzić dla dowolnego wielokąta. Zatem:

Twierdzenie

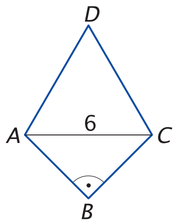
Pole wielokąta opisanego na okręgu jest równe iloczynowi promienia tego okręgu przez połowę obwodu wielokąta.



$$\boldsymbol{P = rp}$$

P — pole wielokąta
p — połowa obwodu wielokąta

PRZYKŁAD Przekątna AC czworokąta $ABCD$ ma długość 6 i dzieli czworokąt na trójkąt równoboczny i trójkąt prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej AC. W ten czworokąt można wpisać okrąg. Jaki promień ma taki okrąg?



$$|AD| = |DC| = 6$$

$$|AB| = |BC| = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = \frac{3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}{2} + \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9 + 9\sqrt{3}$$

$p = 6 + 3\sqrt{2}$ — p — połowa obwodu czworokąta $ABCD$

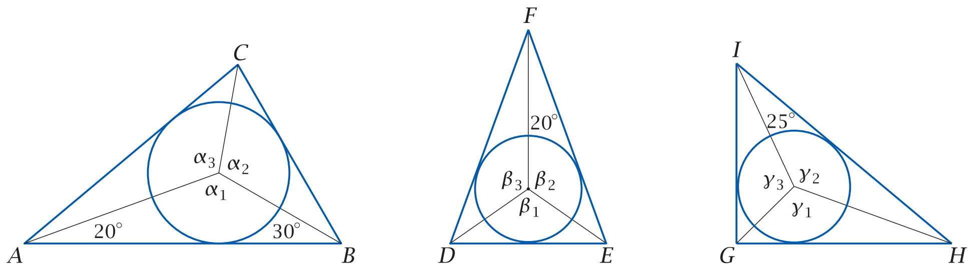
$r = \frac{P_{ABCD}}{p} = \frac{9+9\sqrt{3}}{6+3\sqrt{2}} = \underline{\frac{3+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}}$ — r — promień okręgu wpisanego w czworokąt $ABCD$

ZADANIE W czworokącie $KLMN$ przekątna KM ma długość 24 i dzieli ten czworokąt na dwa trójkąty równoramienne o podstawie KM. Ramiona tych trójkątów mają długości 13 i 20. Jaką długość ma promień okręgu wpisanego w czworokąt $KLMN$?

zadania 12–15

ZESTAW ZADAŃ

I **1.** Poniżej narysowano trójkąty: ostrokątny, równoramienny oraz prostokątny. Oblicz miary kątów tych trójkątów oraz miary kątów oznaczonych literami.



2. Narysuj dowolny kąt ostry. Na jednym z ramion zaznacz punkt A. Skonstruuj okrąg styczny do obu ramion narysowanego kąta tak, aby punkt A był jednym z punktów styczności.

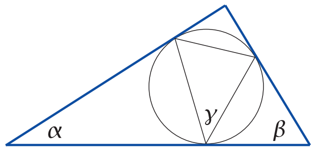
3. W trójkąt równoramienny ABC, w którym kąt między ramionami AC i BC ma $100°$, wpisano okrąg o środku O. Oblicz miarę kąta AOB.

4. Uzasadnij, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest równa sumie długości średnic okręgu wpisanego w ten trójkąt oraz okręgu opisanego na tym trójkącie.

5. Kąt między ramionami AC i BC trójkąta równoramiennego ABC ma miarę $40°$. Punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a punkt S jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Oblicz miarę kąta SAO.

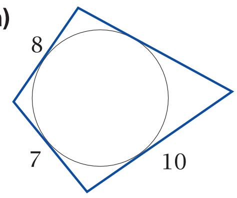
6. Na rysunku obok trójkąt o kątach α i β opisany jest na okręgu. Kąt γ jest kątem trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności. Wykaż, że:

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

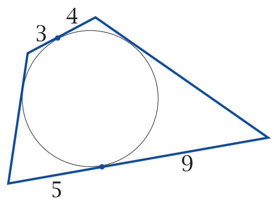


II **7.** Oblicz obwód czworokąta przedstawionego na rysunku.

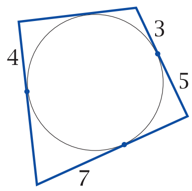
a)



b)



c)



8. Sprawdź, czy można wpisać okrąg w czworokąt wypukły, którego kolejne boki mają długości:

a) 7, 12, 17, 12 **b)** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ **c)** 3, $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}-3$, $3\sqrt{3}$

9. Długości boków pewnego czworokąta są kolejnymi liczbami naturalnymi. Czy w ten czworokąt można wpisać okrąg?

10. Punkty A, B i C są wierzchołkami trójkąta, w którym $|AB| = |BC|$. Znajdź konstrukcyjnie taki punkt D, że istnieje okrąg wpisany w czworokąt $ABCD$ i istnieje okrąg opisany na tym czworokącie.

11. Na pewnym trapezie można opisać okrąg, a także można w ten trapez wpisać okrąg. Podstawy tego trapezu mają długości 7 i 3. Oblicz długości jego ramion.

III **12.** Uzasadnij, że pole czworokąta opisanego na okręgu o promieniu r jest równe $r(a+b)$, gdzie a i b są długościami dwóch przeciwległych boków.

13. Wykaż, że stosunek obwodu koła do obwodu wielokąta opisanego na nim jest równy stosunkowi pola koła do pola wielokąta.

14. Oblicz promień okręgu wpisanego w romb o przekątnych 10 cm i 12 cm.

15. Oblicz długości promieni okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny i opisanego na nim, jeżeli boki trójkąta mają długości:

a) 8, 15, 17 **b)** 1, 2, $\sqrt{5}$ **c)** $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{11}$

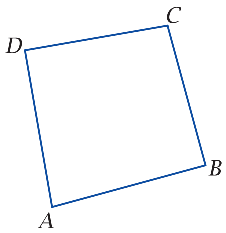
MINISPRAWDZIAN

S1. Na okręgu o środku S jest opisany trójkąt prostokątny równoramienny ABC. Odcinek BC to najdłuższy bok trójkąta. Jaką miarę ma kąt ASB?

A. 135° B. 67,5° C. 90° D. 112,5°

S2. W czworokącie na rysunku: $|AB| = |AD|$ i $|BC| = |CD|$. Taki czworokąt nazywa się deltoidem. Ponadto $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = 90°$. Które ze zdań jest prawdziwe?

A. *Na tym czworokącie nie można opisać okręgu i w ten czworokąt nie można wpisać okręgu.*
B. *Na tym czworokącie można opisać okrąg, ale w ten czworokąt nie można wpisać okręgu.*
C. *Na tym czworokącie nie można opisać okręgu, ale w ten czworokąt można wpisać okrąg.*
D. *Na tym czworokącie można opisać okrąg i w ten czworokąt można wpisać okrąg.*



S3. Obwód czworokąta opisanego na okręgu o promieniu 3 jest równy 40. Pole tego czworokąta jest równe:

A. 120 B. 80 C. 60 D. 30

S4. Jaki jest promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 7 i 24?

A. 5 B. 6 C. 7 D. 3

OKRĄG WPISANY W WIELOKĄT

130. Ramię trapezu równoramiennego ma długość 5, a okrąg wpisany w ten trapez ma promień 2. Oblicz pole tego trapezu.

131. Jedna z przekątnych rombu jest dwa razy dłuższa od drugiej. Oblicz stosunek długości boku tego rombu do promienia okręgu w niego wpisanego.

132. Podstawy trapezu mają długości 2 i 8. Na tym trapezie można opisać okrąg i można w niego wpisać okrąg. Oblicz pole tego trapezu.

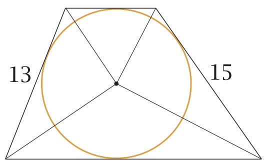
133. a) W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AM i BN, które przecinają się w punkcie P. Wykaż, że na czworokącie $CNPM$ można opisać okrąg.

b) Sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny. Wykaż, że w czworokąt $ACDE$ można wpisać okrąg.

c) W trapezie $ABCD$ kąty ABC i BCD są proste, dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie M, a dwusieczna kąta ADC przecina bok AB w punkcie N. Punkt P jest punktem przecięcia tych dwusiecznych. Wykaż, że na każdym z czworokątów $BMPN$ i $CDPM$ można opisać okrąg.

d) Na bokach AB i AC trójkąta równobocznego ABC obrano dwa punkty M i N tak, że $|AM| = |AN| = \frac{1}{3}|AB|$. Wykaż, że w czworokąt $BCNM$ można wpisać okrąg.

134. Ramiona trapezu opisanego na okręgu mają długości 13 i 15, a pole tego trapezu jest równe 168 (zob. rysunek). Oblicz pola czterech trójkątów, na które trapez dzielą odcinki łączące środek okręgu z wierzchołkami trapezu.



135. a) Trapez równoramienny o obwodzie 20 i przekątnej długości $\sqrt{41}$ jest opisany na okręgu. Oblicz pole tego trapezu.

b) Trapez równoramienny jest opisany na okręgu o promieniu 6. Kąt ostry tego trapezu ma miarę 60°. Oblicz pole tego trapezu.

136. Wysokość trapezu równoramiennego h jest równa średniej geometrycznej długości jego podstaw a i b (tzn. $h = \sqrt{ab}$). Wykaż, że w ten trapez można wpisać okrąg.

137. W trapezie $ABCD$ bok AD jest prostopadły do podstaw AB i DC. W ten trapez wpisano okrąg o środku S i wiadomo, że $|SC| = 6$ oraz $|SB| = 8$. Oblicz pole tego trapezu.

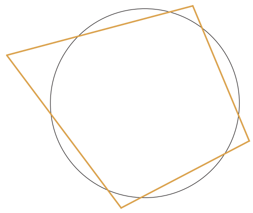
138. a) Kąt ostry rombu ma miarę 60°. Znajdź stosunek pola koła wpisanego w ten romb do pola koła opisanego na jednym z trójkątów, na które rozcina ten romb jego dłuższa przekątna.

b) W czworokącie $ABCD$ dane są: $|AB| = |AD|$, $|BC| = |CD|$, $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = 90°$ i $|\sphericalangle BCD| = 60°$. Znajdź stosunek pola koła opisanego na tym czworokącie do pola koła wpisanego w trójkąt BCD.

c) W pewien trapez równoramienny o kącie ostrym 60° można wpisać koło. Znajdź stosunek pola koła opisanego na trapezie do pola koła wpisanego w ten trapez.

R **139.** Podstawy trapezu prostokątnego opisanego na okręgu mają długości a i b. Jakie długości mają pozostałe boki tego trapezu?

R **140.** Na rysunku obok okrąg wyciął na każdym z boków czworokąta cięciwy o jednakowych długościach. Wykaż, że w ten czworokąt można wpisać okrąg.



140

KARTY PRACY UTWORZONE Z WYKORZYSTANIEM *KOMPOZYTORA KLASÓWEK I KART PRACY*

Więcej informacji o programie na www.matematyka.kompozytorklasowek.gwo.pl.

Zestaw zadań

str. 1/2
grupa **A**

.... imię i nazwisko .... lp. w dzienniku .... klasa .... data

1. Na którym z podanych wielokątów nie można opisać okręgu?

   A. na trapezie prostokątnym, który nie jest prostokątem
   B. na kwadracie
   C. na trójkącie prostokątnym
   D. na prostokącie

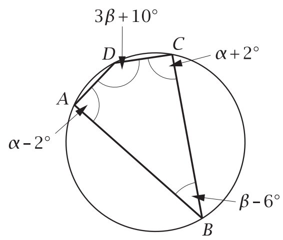
2. Na pewnym sześciokącie można opisać okrąg o promieniu 3. Wynika stąd, że:

   A. suma długości przeciwległych boków sześciokąta jest równa 9.
   B. każdy wierzchołek sześciokąta jest odległy od środka okręgu o 3.
   C. pole tego sześciokąta jest równe 18.
   D. środek okręgu jest odległy od środka jednego z boków sześciokąta o 3.

3. Okrąg można opisać na czworokącie, którego kolejne kąty mają miary:

   A. α, 77°, $90^\circ + \alpha$, 123°
   B. 80°, 100°, 110°, 70°
   C. α, 107°, $180^\circ - \alpha$, 73°
   D. 50°, 90°, 50°, 170°

4. Znajdź miary kątów czworokąta przedstawionego na rysunku.



5. Znajdź promień okręgu opisanego na prostokącie o bokach długości 5 i 12.

6. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg o środku O i promieniu $r = 4\sqrt{\sqrt{2}-1}$. Przekątne AC i BE tego sześciokąta są prostopadłymi średnicami tego okręgu oraz $|CD| = |DE| = |EF| = |FA|$. Wykaż, że pole tego sześciokąta jest równe 16.

7. Okrąg o promieniu 10 cm jest opisany na trapezie, a środek tego okręgu należy do trapezu i jest odległy o 6 cm od dłuższej podstawy i o 8 cm od krótszej. Oblicz obwód tego trapezu.

8. W okrąg o promieniu r jest wpisany dziewięciokąt. Uzasadnij, że co najmniej jeden jego bok ma długość mniejszą niż $0{,}7r$.

Zestaw zadań

str. 1/2
grupa **B**

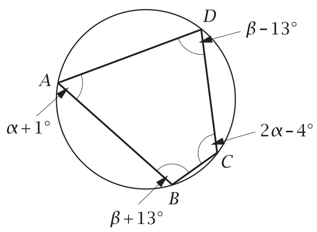
.... imię i nazwisko .... lp. w dzienniku .... klasa .... data

1. Na którym z podanych wielokątów nie można opisać okręgu?
   A. na trapezie równoramiennym, który nie jest równoległobokiem
   B. na równoległoboku niebędącym prostokątem
   C. na kwadracie
   D. na trójkącie rozwartokątnym

2. Na pewnym sześciokącie można opisać okrąg o promieniu 4. Wynika stąd, że:
   A. pole tego sześciokąta jest równe 24.
   B. środek okręgu jest odległy od środka jednego z boków sześciokąta o 4.
   C. suma długości przeciwległych boków sześciokąta jest równa 12.
   D. każdy wierzchołek sześciokąta jest odległy od środka okręgu o 4.

3. Okrąg można opisać na czworokącie, którego kolejne kąty mają miary:
   A. α, $85°$, $180° - \alpha$, $95°$
   C. $70°$, $90°$, $70°$, $130°$
   B. $70°$, $110°$, $100°$, $80°$
   D. α, $60°$, $90° + \alpha$, $140°$

4. Znajdź miary kątów czworokąta przedstawionego na rysunku.



5. Znajdź promień okręgu opisanego na prostokącie o bokach długości 8 i 15.

6. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg o środku O i promieniu $r = 3\sqrt{\sqrt{2}-1}$. Przekątne AC i BE tego sześciokąta są prostopadłymi średnicami tego okręgu oraz $|CD| = |DE| = |EF| = |FA|$. Wykaż, że pole tego sześciokąta jest równe 9.

7. Okrąg o promieniu 15 cm jest opisany na trapezie, a środek tego okręgu należy do trapezu i jest odległy o 9 cm od dłuższej podstawy i o 12 cm od krótszej. Oblicz obwód tego trapezu.

8. W okrąg o promieniu r jest wpisany jedenastokąt. Uzasadnij, że co najmniej jeden jego bok ma długość mniejszą niż $0{,}6r$.

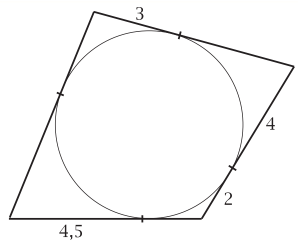
Zestaw zadań

str. 1/2
grupa **A**

....
imię i nazwisko lp. w dzienniku klasa data

1. Obwód czworokąta przedstawionego na rysunku wynosi:

   A. 27 B. 13,5 C. 15,5 D. 20



2. Trzy kolejne boki czworokąta mają długości: 6, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Jaką długość powinien mieć czwarty bok, aby w czworokąt ten można było wpisać okrąg?

   A. 6 B. 7 C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. 3

3. W który z podanych wielokątów nie można wpisać okręgu?

   A. w sześciokąt foremny
   B. w kwadrat
   C. w trójkąt równoramienny
   D. w równoległobok niebędący rombem

4. W wielokąt, którego obwód wynosi 48 cm, a pole jest równe 144 cm^2, wpisano koło. Pole tego koła jest równe:

   A. 12π cm^2 B. 6π cm^2 C. 36π cm^2 D. 9π cm^2

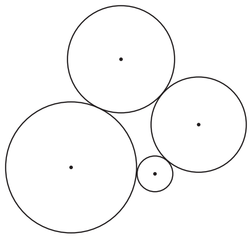
5. W pewien wielokąt można wpisać okrąg o promieniu 3. Oceń prawdziwość zdań. Wstaw znak X w odpowiednią kratkę.

Wielokąt ten musi być trójkątem lub czworokątem.	☐ TAK	☐ NIE
Środek okręgu wpisanego leży na przecięciu dwusiecznych kątów tego wielokąta.	☐ TAK	☐ NIE
Każdy wierzchołek tego wielokąta jest odległy od środka okręgu wpisanego o 3.	☐ TAK	☐ NIE

6. Trzy boki pewnego czworokąta opisanego na okręgu mają długość 8, 10, 14. Jaki obwód ma ten czworokąt? Podaj wszystkie możliwości.

7. Na pewnym okręgu opisano trójkąt o polu 8 i obwodzie równym 20. Na tym samym okręgu opisano trójkąt o polu 10. Ile wynosi jego obwód?

8. Z papieru wycięto cztery koła o promieniach $r_1 = 3$, $r_2 = 8$, $r_3 = 9$, $r_4 = 11$. Koła ułożono tak, aby każde było styczne do dwóch pozostałych w sposób przedstawiony na rysunku.
a) Uzasadnij, że w czworokąt, którego wierzchołkami są środki tych kół, można wpisać okrąg.
b) Wykaż, że jedna z przekątnych tego czworokąta jest mniejsza niż 28, a druga — mniejsza niż 25.



9. Trapez równoramienny jest opisany na okręgu o promieniu $r = 9$ cm, a jedna z jego podstaw też ma długość 9 cm. Oblicz obwód tego trapezu.

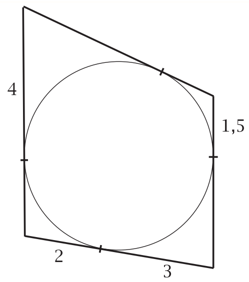
str. 1/2
grupa **B**

Zestaw zadań

.... imię i nazwisko .... lp. w dzienniku .... klasa .... data

1. Obwód czworokąta przedstawionego na rysunku wynosi:

A. 12,5 B. 20 C. 10,5 D. 21



2. Trzy kolejne boki czworokąta mają długości: 4, $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$, $\frac{\sqrt{7}+1}{2}$. Jaką długość powinien mieć czwarty bok, aby w czworokąt ten można było wpisać okrąg?

A. 4 B. 2 C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D. 5

3. W który z podanych wielokątów nie można wpisać okręgu?

A. w kwadrat
B. w sześciokąt foremny
C. w prostokąt niebędący kwadratem
D. w trójkąt równoramienny

4. W wielokąt, którego obwód wynosi 80 cm, a pole jest równe 400 cm^2, wpisano koło. Pole tego koła jest równe:

A. 10π cm^2 B. 25π cm^2 C. 20π cm^2 D. 100π cm^2

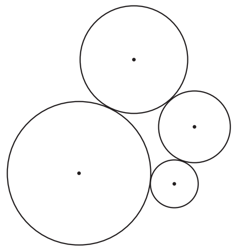
5. W pewien wielokąt można wpisać okrąg o promieniu 5. Oceń prawdziwość zdań. Wstaw znak X w odpowiednią kratkę.

Wielokąt ten musi być trójkątem lub czworokątem.	☐ TAK	☐ NIE
Środek okręgu wpisanego leży na przecięciu dwusiecznych kątów tego wielokąta.	☐ TAK	☐ NIE
Każdy wierzchołek tego wielokąta jest odległy od środka okręgu wpisanego o 5.	☐ TAK	☐ NIE

6. Trzy boki pewnego czworokąta opisanego na okręgu mają długość 7, 9, 13. Jaki obwód ma ten czworokąt? Podaj wszystkie możliwości.

7. Na pewnym okręgu opisano trójkąt o polu 10 i obwodzie równym 12. Na tym samym okręgu opisano trójkąt o polu 25. Ile wynosi jego obwód?

8. Z papieru wycięto cztery koła o promieniach $r_1 = 4$, $r_2 = 6$, $r_3 = 9$, $r_4 = 12$. Koła ułożono tak, aby każde było styczne do dwóch pozostałych w sposób przedstawiony na rysunku.
a) Uzasadnij, że w czworokąt, którego wierzchołkami są środki tych kół, można wpisać okrąg.
b) Wykaż, że jedna z przekątnych tego czworokąta jest mniejsza niż 25, a druga — mniejsza niż 26.



9. Trapez równoramienny jest opisany na okręgu o promieniu $r = 6$ cm, a jedna z jego podstaw też ma długość 6 cm. Oblicz obwód tego trapezu.

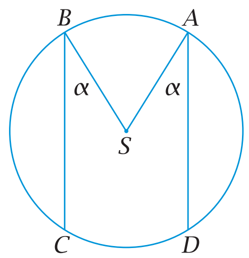
MATERIAŁY DODATKOWE DO WYKORZYSTANIA PRZY REALIZACJI DZIAŁU *FIGURY NA PŁASZCZYŹNIE*

ZNAJDŹ BŁĄD

FIGURY NA PŁASZCZYŹNIE. CZĘŚĆ 2

ZAKRES ROZSZERZONY

Zadanie 1. Na rysunku obok kąty SAD i SBC wpisane w okrąg o środku S mają równe miary. Znajdź błąd w poniższym rozumowaniach.



Rozumowanie A

Kąt CDA jest oparty na średnicy AC, więc jest kątem prostym. Podobnie kąt BCD (oparty na średnicy BD), kąt ABC (oparty na średnicy AC) i kąt BAD (oparty na średnicy BD) są proste, a więc czworokąt $ABCD$ jest prostokątem.

Rozumowanie B

Kąty wpisane SAD i SBC oparte są na tym samym łuku CD, co kąt środkowy CSD, więc $|\sphericalangle CSD| = 2\alpha$. Taką samą miarę ma kąt ASB, ponieważ jest kątem wierzchołkowym do kąta CSD. Ponadto $|SA| = |SB| = |SC| = |SD|$, więc na mocy cechy bkb trójkąty ABS i CDS są przystające. Wynika stąd, że $|AB| = |CD|$.

Zadanie 2. Czy poniższe zdania są prawdziwe? Jeśli zdanie jest fałszywe, to jak można je poprawić, by otrzymać zdanie prawdziwe?

Zdanie A

Kąty środkowe, które wycinają w okręgu łuki o jednakowych długościach mają równe miary.

Zadanie B

Kąty wpisane w dany okrąg oparte na tej samej cięciwie mają równe miary.

Zadanie 3. Czy poniższe zdania są prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij.

Zdanie A
Jedynym czworokątem, na którym można opisać okrąg i w który można wpisać okrąg, jest kwadrat.

Zdanie B
Jeśli na wielokącie W można opisać okrąg, to na dowolnym wielokącie, którego wierzchołkami są wierzchołki wielokąta W, także można opisać okrąg.

Zdanie C
Jeśli w wielokąt W można wpisać okrąg, to w dowolny wielokąt, którego wierzchołkami są wierzchołki wielokąta W, także można wpisać okrąg.

Zdanie D
Czworokąt C jest opisany na okręgu. W czworokąt, którego wierzchołkami są punkty styczności boków czworokąta C z okręgiem, też można wpisać okrąg.


gdańskie
wydawnictwo
oświatowe
Z intuicją po kuli ziemskiej
Lekcje
z wykopem
Scenariusz lekcji dla nauczyciela

Z intuicją po kuli ziemskiej

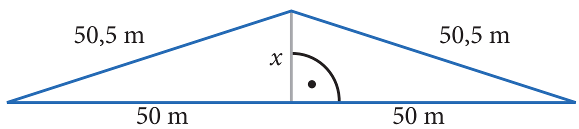
Opis: Cztery zadania geometryczne wykorzystujące twierdzenie Pitagorasa i własności okręgu. Największą wartością jest fakt, że ich rozwiązania zwykle przeczą intuicji. Przed wykonaniem jakichkolwiek rachunków nauczyciel powinien poprosić uczniów, by starali się odgadnąć odpowiedzi, a po obliczeniu poprawnego rozwiązania wykorzystać zaskakujący rezultat, by podkreślić zwodniczość intuicji i niezawodność zasad matematyki.

Uwagi: Uczniowie powinni znać twierdzenie Pitagorasa, wzór na obwód koła i cechy podobieństwa trójkątów. Do niektórych obliczeń potrzebny jest kalkulator naukowy.

Przebieg lekcji:

1. Zadanie: Wzdłuż boiska piłkarskiego o długości 100 m rozciągnięto między słupkami przeciwległych bramek linę (równoległą do dłuższej krawędzi boiska) i naprężono ją. Następnie wydłużono ją o 1 metr i jeden z piłkarzy, stojąc na linii środkowej boiska uniósł środek liny do góry. Na jaką wysokość można podnieść środek liny? Spróbuj odgadnąć odpowiedź, a następnie sprawdź jej poprawność za pomocą rachunków.

Rozwiązanie:



$50^2 + x^2 = 50{,}5^2$
$x^2 = 50{,}5^2 - 50^2$
$x^2 = 50{,}25, \quad x > 0$
$x \approx 7{,}089$ [m]

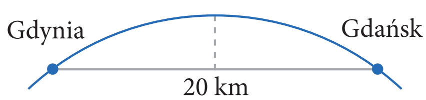
2. Zadanie: Między dwoma słupkami odległymi od siebie o 20 km (jeden jest w Gdyni, a drugi w Gdańsku) zdołano rozpiąć linę tak, że biegnie ona wzdłuż linii prostej. Następnie wydłużono ją o 1 metr i podniesiono środek liny do góry. Na jaką wysokość można go podnieść? Spróbuj odgadnąć odpowiedź, a następnie sprawdź jej poprawność za pomocą rachunków.

Rozwiązanie:

$10\,000^2 + x^2 = 10\,000{,}5^2$
$x^2 = 10\,000{,}5^2 - 10\,000^2$
$x^2 = 10\,000{,}25, \quad x > 0$
$x \approx 100{,}001$ [m]

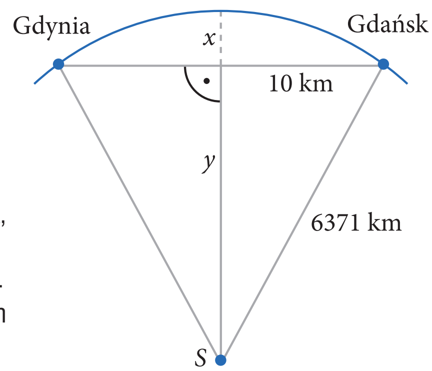
3. Nauczyciel: W poprzednim zadaniu założono, że lina biegnie wzdłuż linii prostej, nie może zatem leżeć na powierzchni Ziemi, gdyż ta nie jest płaska. Przyjmijmy, że Ziemia ma kształt kuli o promieniu 6371 km (w rzeczywistości jej kształt jest znacznie mniej regularny).

4. Zadanie: Przyjmijmy, że lina opisana w poprzednim zadaniu biegnie przez tunel wydrążony wzdłuż linii prostej z Gdyni do Gdańska. Jaka jest największa głębokość pod powierzchnią Ziemi tego tunelu (czyli długość odcinka oznaczonego linią przerywaną na rysunku)? Spróbuj odgadnąć odpowiedź, a następnie sprawdź jej poprawność za pomocą rachunków.



Rozwiązanie:

$10^2 + y^2 = 6371^2$
$y^2 = 6371^2 - 10^2$
$y \approx 6370{,}992$ [km]
$x \approx 6371$ km – 6370,992 km = 0,008 km = 8 m



5. Nauczyciel: Spróbujcie odgadnąć, jaka byłaby wartość x, gdyby Gdynię i Gdańsk zastąpić Szczecinem i Rzeszowem?

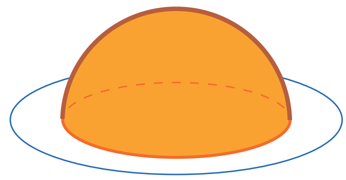
Uwaga: Pytanie to można postawić jako kolejne zadanie (potrzebna jest wtedy informacja, że odległość między Szczecinem a Rzeszowem jest równa około 636 km).

Odpowiedź:

Około 7,94 km.

6. Zadanie: Obwód pomarańczy o średnicy 10 cm zmierzono sznurkiem. Następnie wydłużono ten sznurek o 1 m i rozłożono go równomiernie wokół „równika" pomarańczy. Jaka jest odległość między sznurkiem a powierzchnią pomarańczy? Spróbuj odgadnąć odpowiedź, a następnie sprawdź jej poprawność za pomocą rachunków.

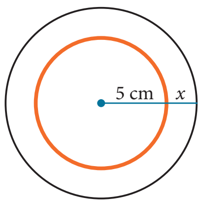
Uwaga: Uczniom niekiedy trudno wyobrazić sobie tę sytuację. Warto pokazać w praktyce kroki opisane w zadaniu. Ułożenie wydłużonego sznurka wokół pomarańczy łatwiej zademonstrować na rozciętym owocu położonym „kołem wielkim" na stole, tak jak na rysunku obok.



Rozwiązanie:

Długość sznurka można przedstawić jako:

- obwód pomarańczy powiększony o 1 m (czyli 100 cm):
  $2\pi \cdot 5 + 100$ [cm]
- obwód koła o promieniu $5 + x$ [cm]



Zatem:

$$2\pi \cdot 5 + 100 = 2\pi(5 + x)$$

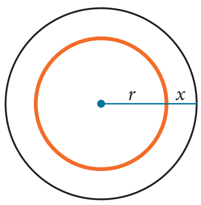
$$x = \frac{100}{2\pi} \approx 15{,}9 \text{ [cm]}$$

7. Zadanie: Przyjmijmy, że Ziemia jest kulą o promieniu 6371 km. Wyobraźmy sobie, że ściśle opasujemy Ziemię sznurkiem wzdłuż równika. Następnie wydłużamy ten sznurek o 1 m i rozkładamy go równomiernie wokół równika. Jaka jest odległość między sznurkiem a powierzchnią Ziemi? Spróbuj odgadnąć odpowiedź, a następnie sprawdź jej poprawność za pomocą rachunków.

Rozwiązanie:

Przedstawiamy rozwiązanie dla dowolnej kuli (o promieniu *r* cm).
Długość sznurka można przedstawić jako:

- obwód kuli powiększony o 1 m (czyli 100 cm):
  $2\pi r + 100$ [cm]
- obwód koła o promieniu $r + x$ [cm]



Zatem:

$$2\pi r + 100 = 2\pi(r + x)$$

$$x = \frac{100}{2\pi} \approx 15{,}9 \text{ [cm]}$$

Nauczyciel: Wynik nie zależy od wielkości kuli!

7. Zadanie: Załóżmy, że w Gdyni i Gdańsku stoją dwa wieżowce o wysokości 100 m, a ich odległość mierzona między ich podstawami wzdłuż linii prostej jest równa 20 km. Czy ich szczyty też oddalone są o 20 km? Jeśli nie, to jaka jest ta odległość? Spróbuj odgadnąć odpowiedź, a następnie sprawdź jej poprawność za pomocą rachunków.

Uwaga: Najwyższy wieżowiec w Gdyni (Sea Towers) ma ponad 125 m wysokości, a w Gdańsku (Neptun) – 85 m (obie wysokości mierzone są od podstawy do dachu).

Rozwiązanie:

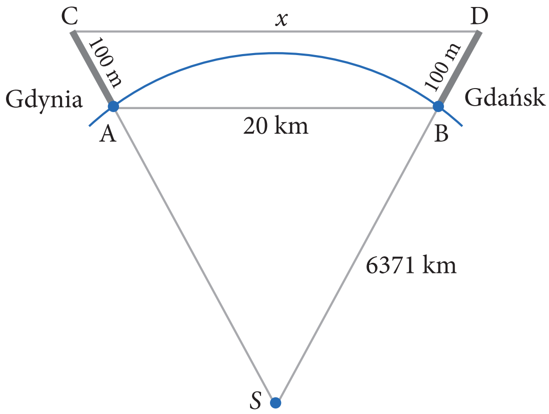
Zakładamy, że wieżowce stoją pionowo, czyli na przedłużeniu promieni kuli ziemskiej.

Trójkąty *ASB* i *CSD* są równoramienne, mają wspólny kąt przy wierzchołku *S*, a więc i pozostałe kąty tych trójkątów są równe. Zatem na mocy cechy *kąt-kąt* są to trójkąty podobne. Stąd:

$$\frac{20}{6371} = \frac{x}{6371 + 0{,}1}$$

$$x = \frac{20 \cdot 6371{,}1}{6371}$$

$$x \approx 20{,}0003 \text{ [km]}$$



Podsumowanie:

Bardzo trudno jest nam uzmysłowić sobie wielkość naszej planety. Z jednej strony zdajemy sobie sprawę z jej ogromu, a z drugiej przeceniamy jej rozmiary i wydaje nam się, że są zbyt duże, byśmy byli w stanie odczuć ich wpływ na nasze codzienne doświadczenia. Tych kilka zadań, które rozwiązaliśmy, daje nam lepsze pojęcie o tym, jak rozumieć kształt i wymiary kuli ziemskiej. Warto zastanowić się nad innymi pokrewnymi zagadnieniami: z jaką prędkością przemieszcza się punkt na równiku w czasie obrotu Ziemi albo o ile większa jest odległość naszych oczu od horyzontu, gdy obserwujemy go z klifu w Gdyni-Orłowie (wysokość 60 m) od odległości, gdy patrzymy z plaży?

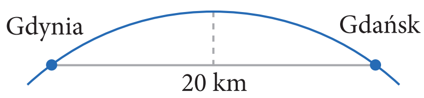

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe
Z intuicją po kuli ziemskiej
Lekcje
z wykopem
Karta pracy dla ucznia

Z intuicją po kuli ziemskiej

Krok 1: Wzdłuż boiska piłkarskiego o długości 100 m rozciągnięto między słupkami przeciwległych bramek linę (równoległą do dłuższej krawędzi boiska) i naprężono ją. Następnie wydłużono ją o 1 metr i jeden z piłkarzy, stojąc na linii środkowej boiska uniósł środek liny do góry. Na jaką wysokość można podnieść środek liny? Spróbuj odgadnąć odpowiedź, a następnie sprawdź jej poprawność za pomocą rachunków.

Krok 2: Między dwoma słupkami odległymi od siebie o 20 km (jeden jest w Gdyni, a drugi w Gdańsku) zdołano rozpiąć linę tak, że biegnie ona wzdłuż linii prostej. Następnie wydłużono ją o 1 metr i podniesiono środek liny do góry. Na jaką wysokość można go podnieść? Spróbuj odgadnąć odpowiedź, a następnie sprawdź jej poprawność za pomocą rachunków.

Krok 3: Przyjmijmy, że lina opisana w poprzednim zadaniu biegnie przez tunel wydrążony wzdłuż linii prostej z Gdyni do Gdańska. Jaka jest największa głębokość pod powierzchnią Ziemi tego tunelu (czyli długość odcinka oznaczonego linią przerywaną na rysunku)? Spróbuj odgadnąć odpowiedź, a następnie sprawdź jej poprawność za pomocą rachunków.



Krok 4: Obwód pomarańczy o średnicy 10 cm zmierzono sznurkiem. Następnie wydłużono ten sznurek o 1 m i rozłożono go równomiernie wokół „równika” pomarańczy. Jaka jest odległość między sznurkiem a powierzchnią pomarańczy? Spróbuj odgadnąć odpowiedź, a następnie sprawdź jej poprawność za pomocą rachunków.

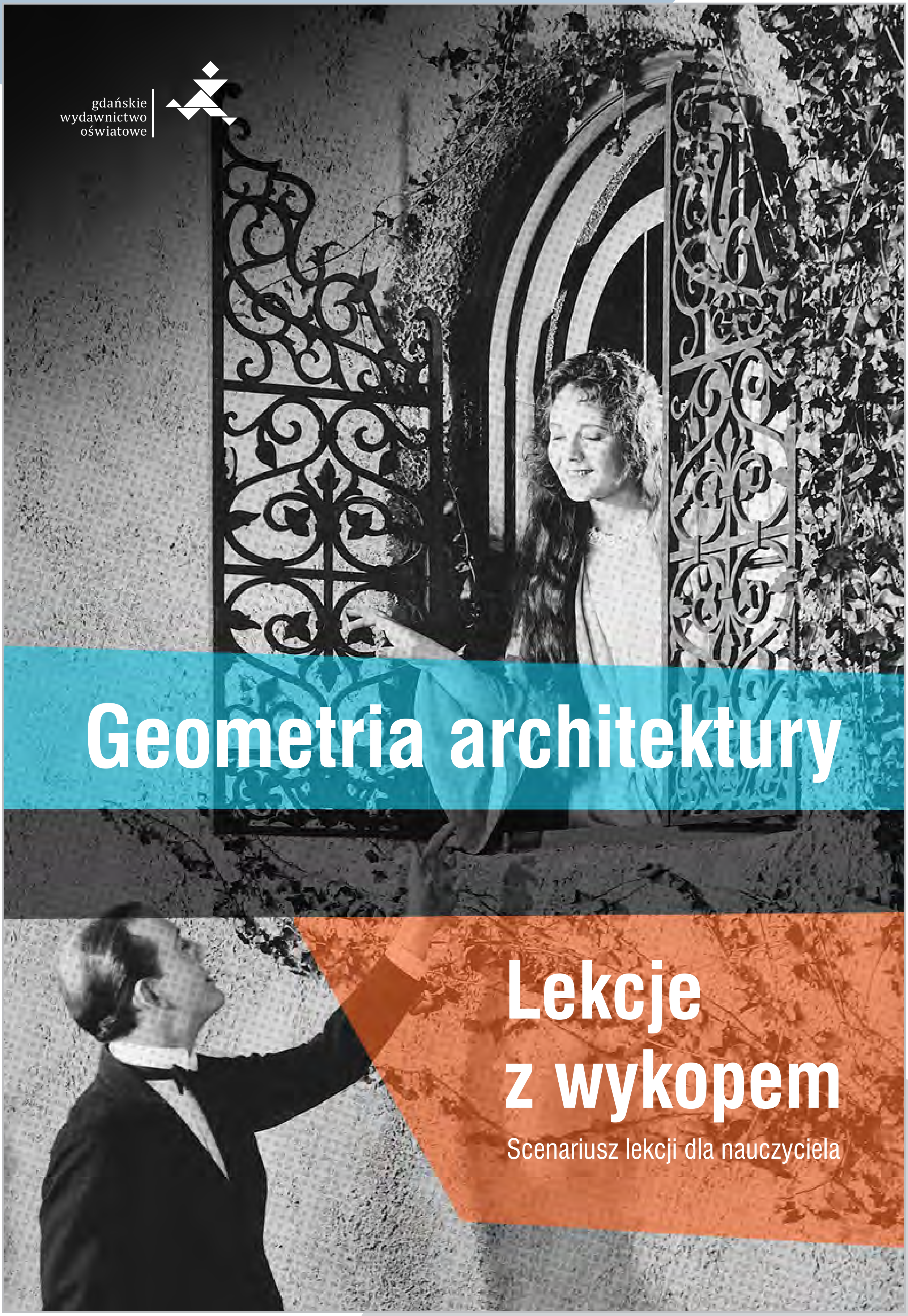
Krok 5: Przyjmijmy, że Ziemia jest kulą o promieniu 6371 km. Wyobraźmy sobie, że ściśle opasujemy Ziemię sznurkiem wzdłuż równika. Następnie wydłużamy ten sznurek o 1 m i rozkładamy go równomiernie wokół równika. Jaka jest odległość między sznurkiem a powierzchnią Ziemi? Spróbuj odgadnąć odpowiedź, a następnie sprawdź jej poprawność za pomocą rachunków.

Krok 6: Załóżmy, że w Gdyni i Gdańsku stoją dwa wieżowce o wysokości 100 m, a ich odległość mierzona między ich podstawami wzdłuż linii prostej jest równa 20 km. Czy ich szczyty też oddalone są o 20 km? Jeśli nie, to jaka jest ta odległość? Spróbuj odgadnąć odpowiedź, a następnie sprawdź jej poprawność za pomocą rachunków.

Uwaga: Najwyższy wieżowiec w Gdyni (Sea Towers) ma ponad 125 m wysokości, a w Gdańsku (Neptun) – 85 m (obie wysokości mierzone są od podstawy do dachu).

Podsumowanie:

Bardzo trudno jest nam uzmysłowić sobie wielkość naszej planety. Z jednej strony zdajemy sobie sprawę z jej ogromu, a z drugiej przeceniamy jej rozmiary i wydaje nam się, że są zbyt duże, byśmy byli w stanie odczuć ich wpływ na nasze codzienne doświadczenia. Tych kilka zadań, które rozwiązaliśmy, daje nam lepsze pojęcie o tym, jak rozumieć kształt i wymiary kuli ziemskiej. Warto zastanowić się nad innymi pokrewnymi zagadnieniami: z jaką prędkością przemieszcza się punkt na równiku w czasie obrotu Ziemi albo o ile większa jest odległość naszych oczu od horyzontu, gdy obserwujemy go z klifu w Gdyni-Orłowie (wysokość 60 m) od odległości, gdy patrzymy z plaży?


gdańskie
wydawnictwo
oświatowe
Geometria architektury
Lekcje
z wykopem
Scenariusz lekcji dla nauczyciela

Geometria architektury

Opis: Na tej lekcji uczniowie przekształcają wzory, korzystają z twierdzenia Pitagorasa oraz z własności trójkątów o kątach 90°, 60°, 30°. Ważnym elementem lekcji jest to, że muszą zauważać związki występujące na rysunkach. Ćwiczymy także konstrukcje geometryczne.

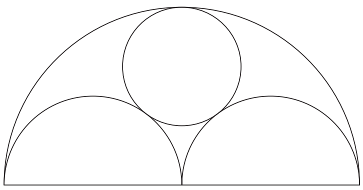
Uwagi: Lekcję można rozpocząć prezentacją różnorodnych detali architektonicznych w oknach budynków, aby pokazać geometryczne kształty w nich występujące (zob. załącznik nr 1 do scenariusza). Przykłady konstrukcji można dobierać stosownie do poziomu wiedzy i umiejętności uczniów.

Przebieg lekcji:

1. Nauczyciel: Związki architektury i geometrii sięgają zamierzchłej przeszłości. Widać je już w liczących blisko 5000 lat kamiennych okręgach Stonehenge czy zdecydowanie bardziej wyrafinowanej architektonicznie piramidzie Cheopsa. Ta zbudowana w formie ostrosłupa o podstawie kwadratu budowla, poprzecinana siecią wewnętrznych korytarzy, jest świadectwem zaawansowanej wiedzy matematycznej, jaką musieli posiadać jej budowniczowie. Dobrym przykładem ścisłych relacji między architekturą i geometrią są także opisane na planie elipsy rzymskie Koloseum czy mediolańska katedra Narodzin św. Marii, gotyckie dzieło architektury sakralnej wzniesione na planie krzyża z typowymi dla tego stylu łukowatymi oknami, ozdobionymi kamiennymi lub ceglanymi ornamentami, a wypełnione wielobarwnymi witrażami.

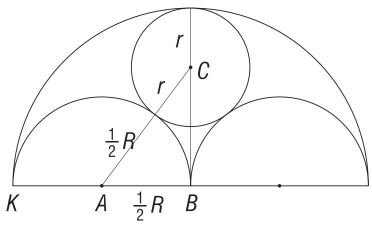
Dzisiejszą lekcję poświęcimy gotyckim oknom, będziemy konstruować ich zwieńczenia, wyznaczać długości odcinków, promienie kół oraz łuków.

2. Ćwiczenie: Wykonaj projekt zwieńczenia przedstawionego na poniższym szkicu, czyli podaj związek między długościami wszystkich półkoli i koła, a następnie dobierz odpowiednie długości promieni i sporządź rysunek w skali.



Rozwiązanie: Niech promień największego półkola wynosi R, czyli promienie mniejszych półkoli wynoszą $\frac{1}{2}R$. Ale jak wyznaczyć promień najmniejszego koła? Oznaczmy jego długość przez r.

Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku:



$KB = R$

$AB = \frac{1}{2}R$

$AC = \frac{1}{2}R + r$

$BC = R - r$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABC otrzymujemy:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\left(\tfrac{1}{2}R + r\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}R\right)^2 + (R-r)^2$$

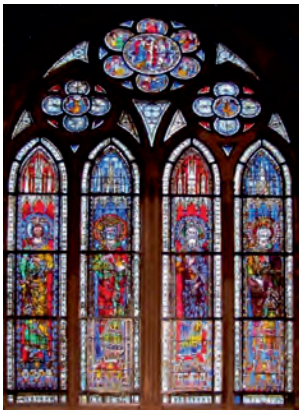
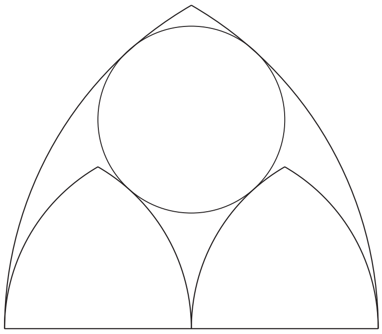
$$\tfrac{1}{4}R^2 + Rr + r^2 = \tfrac{1}{4}R^2 + R^2 - 2Rr + r^2$$

$$r = \tfrac{1}{3}R$$

Teraz można już wykonać dokładny projekt tego zwieńczenia.

Uwaga. Można przypomnieć podział odcinka na trzy części albo wygodnie dobrać promień największego koła.

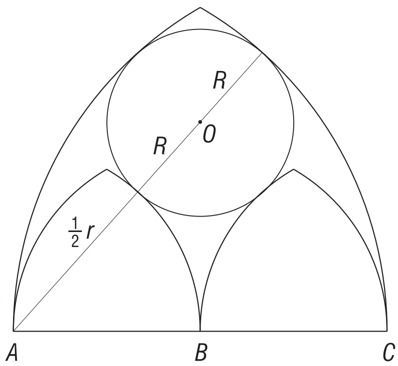
3. Zadanie: Wykonaj projekt zwieńczenia okna katedry w Strasburgu (zob. fotografia) według przygotowanego szkicu.

(https://en.wikipedia.org/wiki/Strasbourg_Cathedral#/media/File:StrasbourgCath_BasCoteN_04a.jpg)

Rozwiązanie: Rysujemy dwa łuki o promieniu r ze środkami na końcach podstawy okna. Otrzymujemy duży ostrołuk. Dwa mniejsze ostrołuki otrzymamy, rysując łuki o promieniu $\frac{1}{2}r$.

Wprowadźmy oznaczenia:



$AC = r$

$AB = \frac{1}{2}r$

$AO = \frac{1}{2}r + R$ oraz $AO = r - R$

$\frac{1}{2}r + R = r - R$

$R = \frac{1}{4}r$

Jak wyznaczyć punkt O? Wystarczy znaleźć punkt przecięcia łuków o promieniu $\frac{1}{2}r + R = \frac{3}{4}r$ o środkach w punktach A i C.

Możemy wyznaczyć także długość odcinka OB. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABO otrzymujemy:

$$AO^2 = OB^2 + AB^2$$

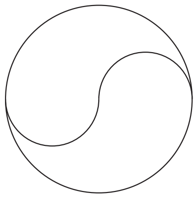
$$OB^2 = \frac{9}{16}r^2 - \frac{4}{16}r^2$$

$$OB = \frac{\sqrt{5}}{4}r$$

W takim razie odległość środka rysowanego okręgu od podstawy zwieńczenia okna wynosi $\frac{\sqrt{5}}{4}r$.

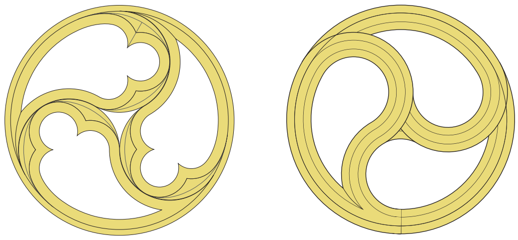
Teraz można już wykonać dokładny projekt tego zwieńczenia.

4. Zadanie: Skonstruuj symbol taijitu (zob. fotografia) według podanego szkicu.

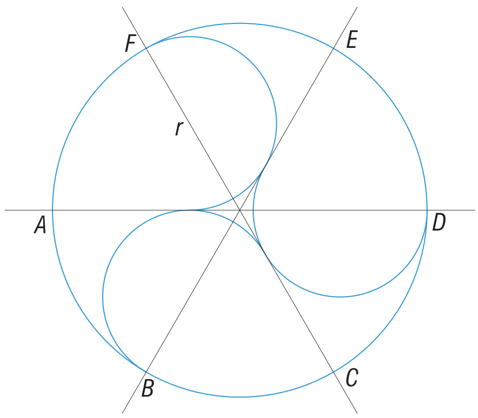


Uwaga. Taki kształt nazywa się podwójnym rybim pęcherzem.

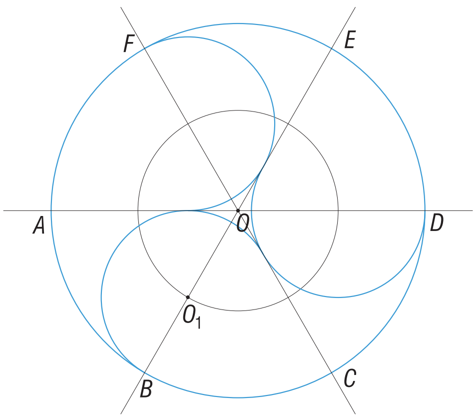
5. Nauczyciel: Zajmiemy się teraz zrozumieniem konstrukcji tak zwanego potrójnego rybiego pęcherza. Jak go skonstruować?



Uwagi. Uczniowie mogą otrzymać kserokopię z rysunkiem (zob. załącznik nr 2 do scenariusza), aby na nim odkryć konstrukcję potrójnego rybiego pęcherza.

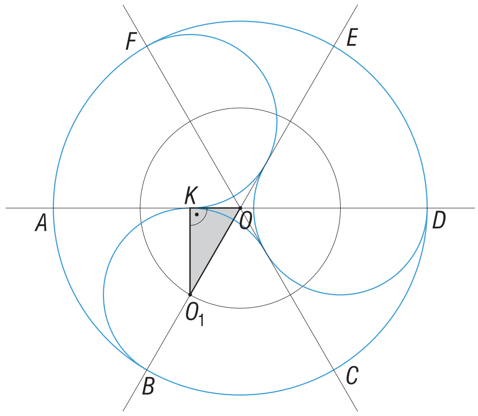


Małe okręgi tworzące pęcherz mają równe promienie i są styczne wewnętrznie do okręgu o promieniu r, są styczne zewnętrznie do siebie i są styczne do prostych AD, BE, CF. Ponieważ punkty $ABCDEF$ są wierzchołkami sześciokąta foremnego, to wszystkie kąty środkowe w dużym okręgu mają miarę 60°.



Środki okręgów leżą na okręgu o środku O i o promieniu OO_1. Ich środki są wierzchołkami trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o środku O i o promieniu OO_1.

Wyznaczymy długość odcinka OO_1.



Trójkąt OO_1K jest trójkątem o kątach 90°, 60°, 30°. W takim razie $O_1K = \frac{OO_1 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

$$OO_1 = r - O_1B$$

Pamiętamy, że r to promień dużego koła.

$O_1B = O_1K$ (promienie małego koła tworzącego pęcherz)

W takim razie:

$$OO_1 = r - O_1K$$

$$OO_1 = r - \frac{OO_1 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Wyznaczamy OO_1:

$$OO_1 + \frac{OO_1 \cdot \sqrt{3}}{2} = r$$

$$\frac{OO_1 \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)}{2} = r$$

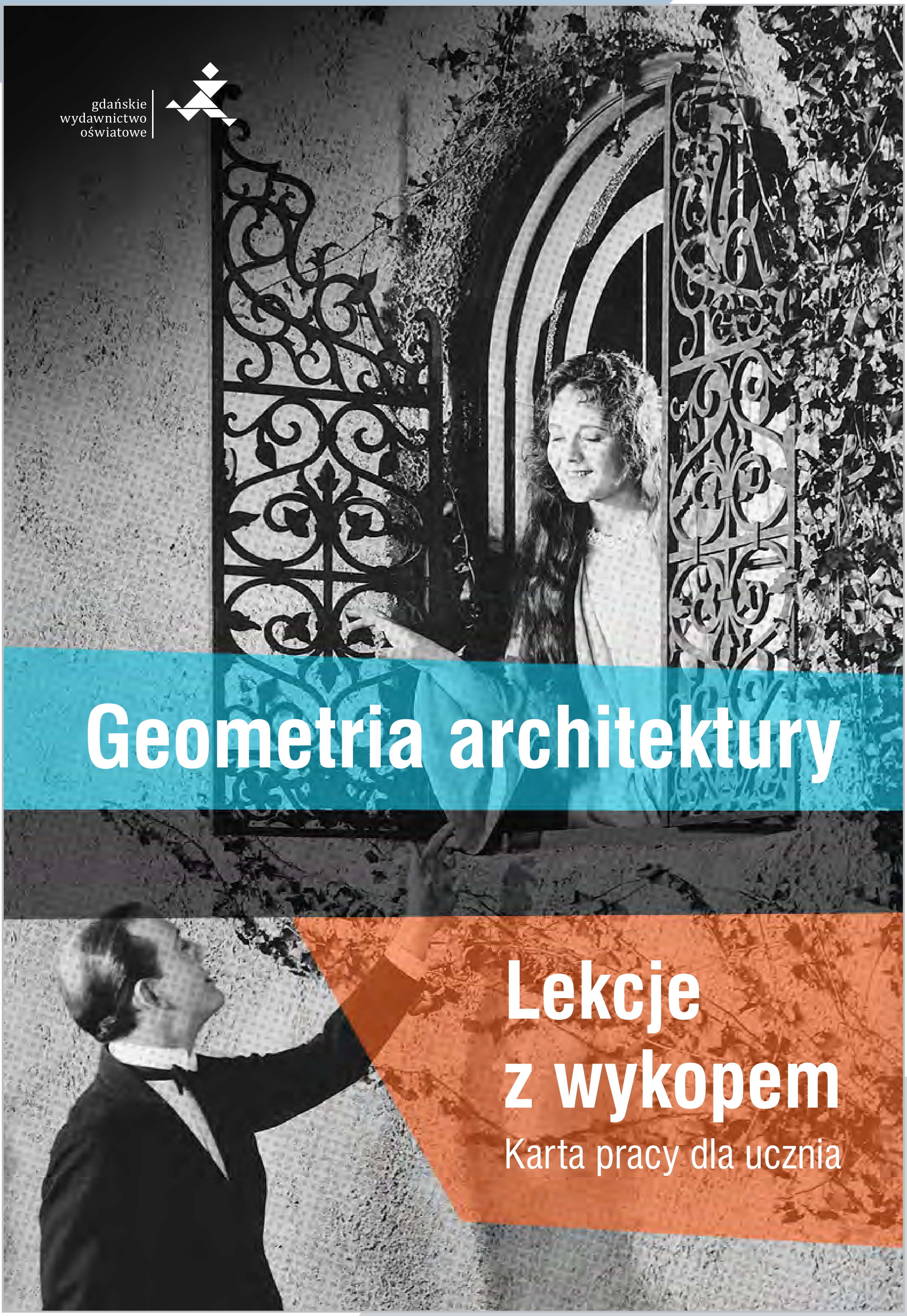
$$OO_1 = \frac{2r}{2 + \sqrt{3}}$$

Wyznaczymy promień małego koła tworzącego pęcherz r_p:

$$r_p = O_1K = \frac{OO_1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{2r}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

Podsumowanie

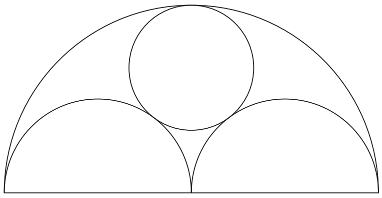
Nauczyciel: Lekcja pokazuje wykorzystanie geometrii w architekturze. Ma to uzmysłowić uczniom, że są otoczeni matematyką.


gdańskie
wydawnictwo
oświatowe
Geometria architektury
Lekcje
z wykopem
Karta pracy dla ucznia

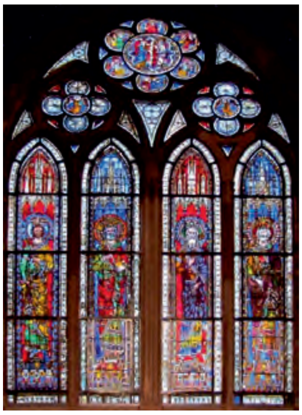
Geometria architektury

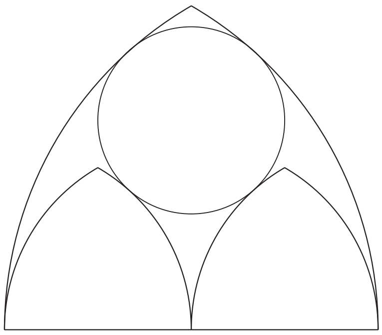
Będziemy konstruować zwieńczenia okien i wyznaczać długości odcinków, promieni i łuków okręgów.

Ćwiczenie: Wykonaj projekt zwieńczenia przedstawionego na poniższym szkicu, czyli podaj związek między długościami wszystkich półkoli i koła, a następnie dobierz odpowiednie długości promieni i sporządź rysunek w skali.



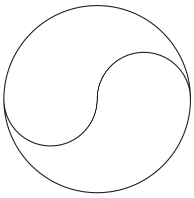
Zadanie 1: Wykonaj projekt zwieńczenia okna katedry w Strasburgu (zob. fotografia) według przygotowanego szkicu.





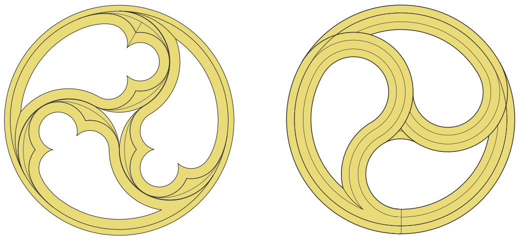
(https://en.wikipedia.org/wiki/Strasbourg_Cathedral#/media/File:StrasbourgCath_BasCoteN_04a.jpg)

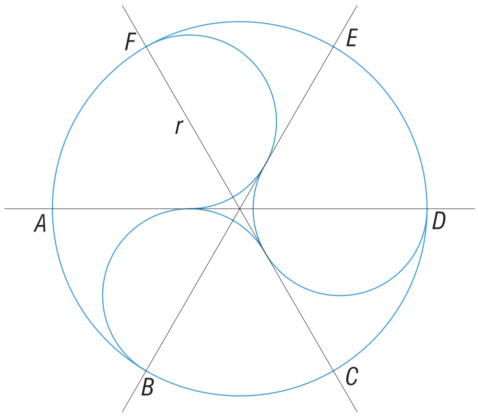
Zadanie 2: Skonstruuj symbol taijitu (zob. fotografia) według podanego szkicu.



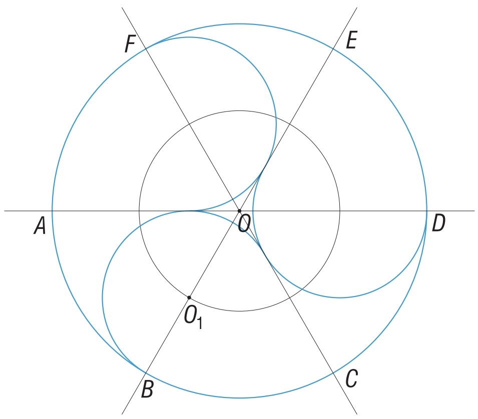
Uwaga. Taki kształt nazywa się podwójnym rybim pęcherzem.

Zajmiemy się teraz zrozumieniem konstrukcji tak zwanego potrójnego rybiego pęcherza. Jak go skonstruować?



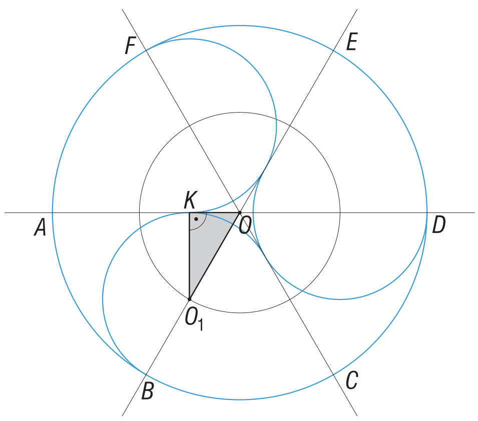


Małe okręgi tworzące pęcherz mają równe promienie i są styczne wewnętrznie do okręgu o promieniu r, są styczne zewnętrznie do siebie i są styczne do prostych AD, BE, CF. Ponieważ punkty $ABCDEF$ są wierzchołkami sześciokąta foremnego, to wszystkie kąty środkowe w dużym okręgu mają miarę 60°.



Środki okręgów leżą na okręgu o środku O i o promieniu OO_1. Ich środki są wierzchołkami trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o środku O i o promieniu OO_1.

Wyznaczymy długość odcinka OO_1.



Trójkąt OO_1K jest trójkątem o kątach 90°, 60°, 30°.
W takim razie $O_1K = \frac{OO_1 \cdot \sqrt{3}}{2}$.

$$OO_1 = r - O_1B$$

Pamiętamy, że r to promień dużego koła.

$O_1B = O_1K$ (promienie małego koła tworzącego pęcherz)

W takim razie:

$$OO_1 = r - O_1K$$

$$OO_1 = r - \frac{OO_1 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Wyznaczamy OO_1:

$$OO_1 + \frac{OO_1 \cdot \sqrt{3}}{2} = r$$

$$\frac{OO_1 \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)}{2} = r$$

$$OO_1 = \frac{2r}{2 + \sqrt{3}}$$

Wyznaczymy promień małego koła tworzącego pęcherz r_p:

$$r_p = O_1K = \frac{OO_1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{2r}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

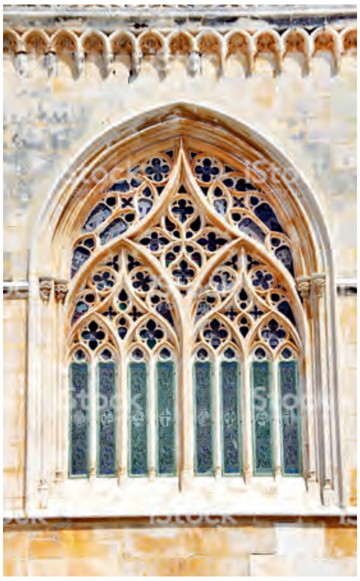
Podsumowanie

Lekcja pokazuje wykorzystanie geometrii w architekturze. Uzmysławia nam, że jesteśmy otoczeni matematyką.

Załącznik nr 1

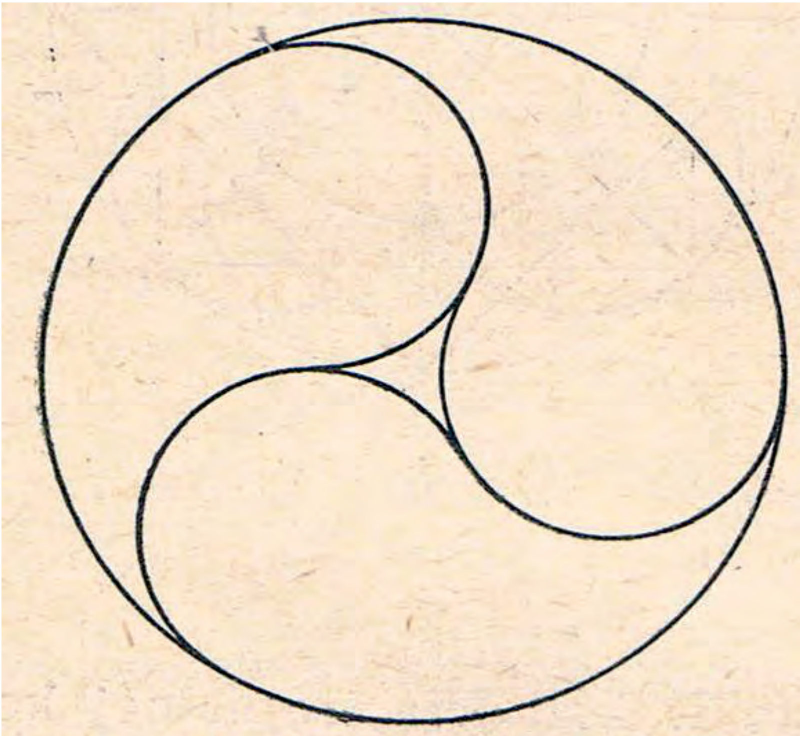
https://oknoserwis.pl/art,2619,,vademecum,.html

https://pl.freepik.com/darmowe-zdjecie/wypuk%C5%82orze%C5%BAby-ozdobne-okno_531930.htm



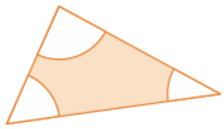
https://www.google.com/search?q=gotyckie+okna+okna&client=firefox-b&tbm=isch&source=iu&ictx=1&fir=MFqDzJURwRLmlM%253A%252CyrpFcofSwsbL3M%252C_&usg=AI4_-Ta4FLNf5euUMYa6cSJBWetqJptDg&sa=X&ved=2ahUKEwj3sq3_5eLfAhWH3KQKHUHnA1AQ9QEwBHoECAQQDA#imgrc=5tn_BIXzzYxQoM:

Załącznik nr 2



Zadanie 1

Z trójkąta o polu 12 wycięto trzy wycinki koła — każdy o takim samym promieniu i środku w wierzchołku trójkąta tak, że pola zacieniowanej i niezacieniowanej części trójkąta są równe (patrz rysunek).

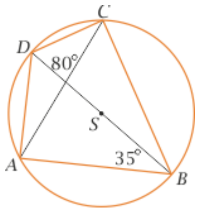


Wynika z tego, że promień kół ma długość:

- $\frac{6}{\pi}$
- $\frac{4}{\pi}$
- jest zbyt mało danych, aby to obliczyć
- $\frac{2\sqrt{3\pi}}{\pi}$

Zadanie 2

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku S (patrz rysunek). Największy kąt tego czworokąta ma miarę:



- 90°
- 120°
- 115°
- 100°

Zadanie 3

Wszystkie boki pewnego trójkąta prostokątnego są styczne do okręgu o promieniu 2 cm. Punkt styczności dzieli przeciwprostokątną tego trójkąta na odcinki o długościach 3 cm i 10 cm. Pole trójkąta jest równe:

- 27 cm^2
- 25 cm^2
- 15 cm^2
- 30 cm^2

Zadanie 4

Okręgi o promieniach długości 12 i 18 są współśrodkowe. Jaką długość ma promień większego z okręgów stycznych jednocześnie do obu tych okręgów?

- 13
- 3
- 6
- 15

Zadanie 5

Ostrokątny trójkąt równoramienny, którego podstawa ma 4 cm, jest wpisany w okrąg o promieniu 3 cm. Obwód tego trójkąta jest równy:

- 21 cm
- $4+2\sqrt{18+6\sqrt{5}}$ cm
- $\sqrt{18+6\sqrt{5}}$ cm
- 18 cm

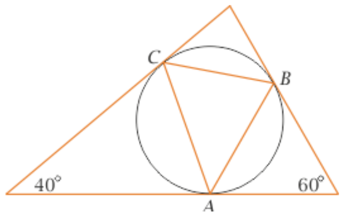
Zadanie 6

Oblicz miarę największego kąta czworokąta wpisanego w okrąg, jeśli miary pozostałych kątów tego czworokąta wynoszą: 2α, 3α i 7α.

- 18°
- 144°
- 120°
- 210°

Zadanie 7

Na rysunku trójkąt o kątach 40° i 60° opisany jest na okręgu. Punkty A, B i C są punktami styczności boków trójkąta z okręgiem. Miara najmniejszego z kątów trójkąta ABC jest równa:



- [ ] 50°
- [ ] 55°
- [ ] 40°
- [ ] 60°

Zadanie 8

Na pewnym trapezie można opisać okrąg, a także można w ten trapez wpisać okrąg. Podstawy tego trapezu mają długości 8 i 18. Pole trapezu jest równe:

- [ ] 72
- [ ] 148
- [ ] 144
- [ ] 156

Zadanie 9

Z wierzchołka pewnego wielokąta można poprowadzić 12 przekątnych. Suma miar jego kątów jest równa:

- [ ] 1980°
- [ ] 2340°
- [ ] 2160°
- [ ] 2700°

Zadanie 10

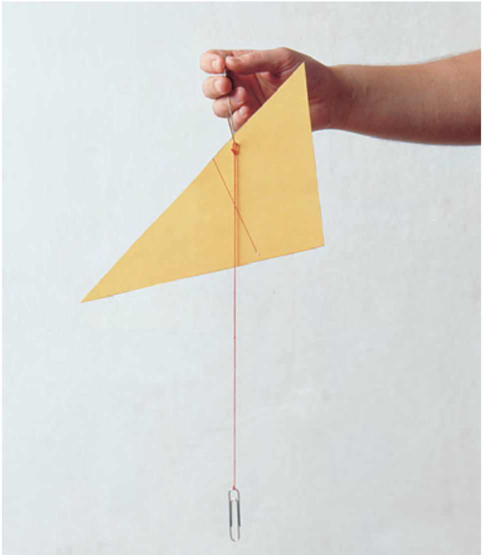
Suma długości wszystkich przekątnych sześciokąta foremnego o boku długości 6 wynosi:

- [ ] $18+18\sqrt{3}$
- [ ] $36\sqrt{3}$
- [ ] $18+36\sqrt{3}$
- [ ] $36+36\sqrt{3}$

ŚRODEK CIĘŻKOŚCI

Środek trójkąta

1. Narysuj na kartonie dowolny trójkąt (raczej duży) i wytnij ten trójkąt. Powieś go na spinaczu (miejsce zaczepienia wybierz w pewnej odległości od wierzchołków). Na tym samym spinaczu powieś nitkę, obciążoną na przykład innym spinaczem. Zaznacz na trójkącie linię wzdłuż nitki.



2. Wybierz inny punkt do zawieszenia trójkąta, a następnie wykonaj te same czynności.

3. Znajdź punkt przecięcia narysowanych linii i oznacz go literą S. Zaznaczony punkt to **środek ciężkości trójkąta**.

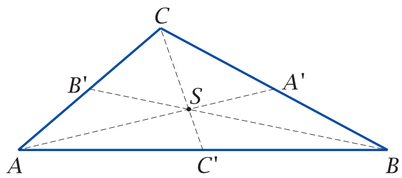
4. Z każdego wierzchołka trójkąta poprowadź przez punkt S odcinek łączący ten wierzchołek z przeciwległym bokiem. Końce poprowadzonych w ten sposób odcinków podzieliły każdy bok trójkąta na dwie części. Zmierz i porównaj długości tych części. Oblicz także, w jakim stosunku punkt S dzieli każdy z trzech odcinków (łączących wierzchołek z przeciwległym bokiem).

5. Sprawdź, czy podobne wyniki otrzymasz dla innego trójkąta.

Odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku nazywamy **środkową**. Punkt przecięcia środkowych to **środek ciężkości** trójkąta. Doświadczenie, które wykonałeś, potwierdza następującą własność środkowych:

Środek ciężkości dzieli każdą środkową w stosunku $1:2$.

6. Na rysunku obok punkt S to środek ciężkości trójkąta ABC. Zapisz własność podaną wyżej za pomocą odpowiednich równości.



Co dalej?

Narysuj na kartonie dowolny trójkąt, a następnie wyznacz konstrukcyjnie środek ciężkości tego trójkąta. Czy umiałbyś wyznaczyć środek ciężkości, rysując tylko jedną środkową?

Wytnij narysowany trójkąt i spróbuj ustawić go na przykład na czubku ołówka, tak aby czubek podpierał trójkąt w punkcie przecięcia środkowych. Jeśli dokładnie wykonałeś rysunek, trójkąt powinien utrzymać się w poziomie.

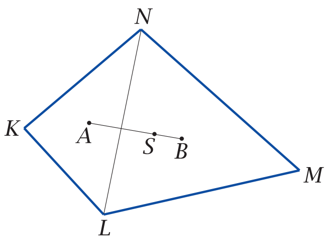
Środek czworokąta

1. Narysuj na kartonie dowolny czworokąt wypukły $ABCD$. Wyznacz konstrukcyjnie środki ciężkości następujących trójkątów: ABC, ACD, ABD i BCD.

Punkty (środki ciężkości), które wyznaczyłeś, są wierzchołkami pewnego czworokąta. Znajdź punkt przecięcia przekątnych tego czworokąta i oznacz go literą P.

2. Wytnij czworokąt $ABCD$ i wyznacz doświadczalnie jego środek ciężkości w ten sam sposób, jak wyznaczałeś środek ciężkości trójkąta.

Jeśli dokładnie wykonałeś oba polecenia, środek ciężkości czworokąta powinien znaleźć się w punkcie P.



$$\frac{|SB|}{|SA|} = \frac{\text{pole trójkąta } KLN}{\text{pole trójkąta } LMN}$$

Co dalej?

Wyobraź sobie, że czworokąt wypukły dzielimy przekątną na dwa trójkąty. Niech A i B oznaczają środki ciężkości tych trójkątów, a S — środek ciężkości czworokąta (punkt S należy do odcinka AB). Okazuje się, że:

Stosunek pól trójkątów (o środkach ciężkości A i B) jest równy stosunkowi długości odcinków, na które punkt S dzieli odcinek AB.

Sprawdź doświadczalnie tę własność.

Multipodręczniki dla klas 1 i 2 – zakresy podstawowy i rozszerzony

Dopasowane do umiejętności uczniów po 8-klasowej szkole podstawowej? Kształcą umiejętność budowania modeli? Dawkują wiadomości w łatwo przyswajalnych porcjach?

Sprawdź.

Twój kod dostępu:

MASZ-NOWY-PODR

1. Wejdź na **www.wpiszkod.gwo.pl**.
2. Zaloguj się lub najpierw zarejestruj, jeśli nigdy wcześniej nie rejestrowałaś/eś się na www.gwo.pl.
3. Wpisz kod. Wpisujesz go tylko raz, potem przeglądasz podręczniki, logując się na www.gwo.pl (panel „Moje GWO, zakładka „Multipodręczniki").

Książki możesz przeglądać przez 30 dni od pierwszego uruchomienia.

ZAPROŚ NAS DO SWOJEJ SZKOŁY

Skontaktuj się z najbliższym koordynatorem, który w szczegółach przedstawi naszą ofertę.

woj. dolnośląskie
Ewa Chmielowska
tel. 693 090 039, e-mail: echmielowska@gwo.pl
Grzegorz Kalferszt
tel. 607 524 800, e-mail: gkalferszt@gwo.pl
Justyna Rejter
tel. 601 330 630, e-mail: jrejter@gwo.pl
Marta Wilczyńska
tel. 601 990 728, e-mail: mwilczynska@gwo.pl

woj. kujawsko-pomorskie
Lena Czygier
tel. 601 690 901, e-mail: lczygier@gwo.pl
Izabela Wisełka
tel. 601 691 868, e-mail: iwiselka@gwo.pl

woj. lubelskie
Marta Jonasz
tel. 601 990 618, e-mail: mjonasz@gwo.pl
Aleksandra Szymaniak
tel. 601 990 328, e-mail: aszymaniak@gwo.pl

woj. lubuskie
Magdalena Wójcik
tel. 601 578 129, e-mail: mwojcik@gwo.pl
Natalia Zwolińska
tel. 605 350 010, e-mail: nzwolinska@gwo.pl

woj. łódzkie
Piotr Chlebosz
tel. 601 990 774, e-mail: pchlebosz@gwo.pl
Maciej Ignaczak
tel. 605 135 957, e-mail: mignaczak@gwo.pl
Michał Kodłubański
tel. 601 556 053, e-mail: mkodlubanski@gwo.pl
Marta Wilczyńska
tel. 601 990 728, e-mail: mwilczynska@gwo.pl

woj. małopolskie
Magdalena Brzazgacz-Wichrowska
tel. 601 250 058, e-mail: mbrzazgacz@gwo.pl
Sławomir Buczyński
tel. 601 577 752, e-mail: sbuczynski@gwo.pl
Joanna Chronowska-Nycek
tel. 601 990 204, e-mail: jnycek@gwo.pl
Marcin Oleksy
tel. 607 885 521, e-mail: moleksy@gwo.pl

woj. mazowieckie
Jolanta Klawe-Guzek
tel. 601 990 280, e-mail: jguzek@gwo.pl
Agnieszka Majewska
tel. 601 575 459, e-mail: amajewska@gwo.pl
Joanna Markowska
tel. 605 056 011, e-mail: jmarkowska@gwo.pl
Michał Moskal
tel. 601 574 758, e-mail: mmoskal@gwo.pl
Sławomir Sakowski
tel. 601 630 078, e-mail: ssakowski@gwo.pl

woj. opolskie
Dorota Henel-Kociołek
tel. 695 750 153, e-mail: dkociolek@gwo.pl
Justyna Rejter
tel. 601 330 630, e-mail: jrejter@gwo.pl
Marta Wilczyńska
tel. 601 990 728, e-mail: mwilczynska@gwo.pl

woj. podkarpackie
Sławomir Buczyński
tel. 601 577 752, e-mail: sbuczynski@gwo.pl
Jaromir Pajda
tel. 607 774 405, e-mail: jpajda@gwo.pl

woj. podlaskie
Beata Krajewska
tel. 695 730 007, e-mail: bkrajewska@gwo.pl
Joanna Markowska
tel. 605 056 011, e-mail: jmarkowska@gwo.pl

woj. pomorskie
Mateusz Kisała
tel. 601 990 773, e-mail: mkisala@gwo.pl
Magdalena Oleszczuk
tel. 601 450 200, e-mail: moleszczuk@gwo.pl
Michał Pałczyński
tel. 601 576 552, e-mail: mpalczynski@gwo.pl

woj. śląskie
Magdalena Brzazgacz-Wichrowska
tel. 601 250 058, e-mail: mbrzazgacz@gwo.pl
Piotr Chlebosz
tel. 601 990 774, e-mail: pchlebosz@gwo.pl
Dorota Henel-Kociołek
tel. 695 750 153, e-mail: dkociolek@gwo.pl
Jolanta Miziewicz-Duśko
tel. 601 754 070, e-mail: jmiziewicz@gwo.pl
Marcin Oleksy
tel. 607 885 521, e-mail: moleksy@gwo.pl

woj. świętokrzyskie
Michał Moskal
tel. 601 574 758, e-mail: mmoskal@gwo.pl
Marcin Oleksy
tel. 607 885 521, e-mail: moleksy@gwo.pl

woj. warmińsko-mazurskie
Beata Krajewska
tel. 695 730 007, e-mail: bkrajewska@gwo.pl
Andrzej Kwiatkowski
tel. 607 077 747, e-mail: akwiatkowski@gwo.pl
Michał Pałczyński
tel. 601 576 552, e-mail: mpalczynski@gwo.pl

woj. wielkopolskie
Grzegorz Kalferszt
tel. 607 524 800, e-mail: gkalferszt@gwo.pl
Mateusz Kisała
tel. 601 990 773, e-mail: mkisala@gwo.pl
Marta Wilczyńska
tel. 601 990 728, e-mail: mwilczynska@gwo.pl
Magdalena Wójcik
tel. 601 578 129, e-mail: mwojcik@gwo.pl

woj. zachodniopomorskie
Mateusz Kisała
tel. 601 990 773, e-mail: mkisala@gwo.pl
Natalia Zwolińska
tel. 605 350 010, e-mail: nzwolinska@gwo.pl

Dokładny obszar działania koordynatorów można sprawdzić na koordynatorzy.gwo.pl.