JAK SIĘ UCZY Z *M+*?

SPRAWDŹ NAS!

matematyka M+ z plusem

Broszura zawiera gotowe materiały do przeprowadzenia lekcji w **2 klasie liceum lub technikum**:

- *Twierdzenie sinusów,*
- *Twierdzenie cosinusów.*

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe

Wstęp

Oddajemy w Państwa ręce zestaw materiałów, który umożliwia przeprowadzenie wraz z uczniami z 2 klasy liceum lub technikum (kształcących się wg podstawy dla zakresu podstawowego) zajęć z dwóch tematów działu *Trygonometria*:

- *Twierdzenie sinusów*,
- *Twierdzenie cosinusów*.

Do realizacji wskazanych zagadnień przygotowaliśmy odpowiednie fragmenty podręcznika, zbioru zadań oraz ćwiczeń podstawowych. Ów zestaw poszerzyliśmy o dodatkowe pomoce – materiały dydaktyczne z bogatych zasobów udostępnianych bezpłatnie członkom klubu *M+*.

Lekcje z wykopem – scenariusze niebanalnych zajęć lekcyjnych, które na długo zostaną w głowach uczniów. Punktem wyjścia jest ciekawy, niebanalny problem lub historia, która wydarzyła się naprawdę. Autorzy wyjaśniają zagadnienia matematyczne, wykorzystując dostępne przeciętnemu uczniowi narzędzia. Podążanie za proponowanym tokiem wykładu, odkrywanie tajemnicy sprawia, że lekcja zostaje na bardzo, bardzo długo w głowach uczniów.

Znajdź błąd – psychologia poznawcza podpowiada, że nauka na błędach (swoich bądź cudzych) to metoda z olbrzymim potencjałem do wykorzystania w edukacji dzieci i młodzieży. Przygotowane przez nas zestawy zadań ów fakt wykorzystują. Zadaniem uczniów jest wskazanie błędu w prezentowanych rozwiązaniach i skorygowanie go. Oczywiście błędy nie są zwykłymi pomyłkami rachunkowymi – weryfikujemy nimi zrozumienie zagadnień matematycznych przez Państwa podopiecznych.

Test do samodzielnej weryfikacji – wszyscy uczniowie mają dostęp do interaktywnych testów w Strefie ucznia **www.gwo.pl/strefa-ucznia**. To materiał, który wielu wykorzystuje do ostatnich przygotowań przed zbliżającymi się klasówkami. Chcemy pokazać go, gdyż w szybki, prosty i rzetelny sposób pozwala zweryfikować swoją wiedzę i umiejętności.

Mądre projekty – każdemu nauczycielowi zdarza się spotkać uczniów bardziej dociekliwych. Przygotowany materiał pozwala rozwijać potencjał takich właśnie osób – samodzielnie mogą zastosować zdobytą już wiedzę i umiejętności do bardziej złożonych zagadnień.

Wśród propozycji materiałów znajdują się także karty pracy stworzone przy wykorzystaniu *Kompozytora klasówek i kart pracy* – programu komputerowego służącego do szybkiego układania, zapisywania i drukowania różnych zestawów zadań z matematyki (w kilku wariantach). Zadania można dobierać m.in. według stopnia trudności oraz czasu potrzebnego na ich rozwiązanie. Do każdego zestawu zadań dołączony jest klucz odpowiedzi. Zachęcamy, aby wypróbować wersję demonstracyjną programu, odwiedzając stronę **www.matematyka.kompozytorklasowek.gwo.pl**.

Zdecydowaliśmy się także na zwrócenie Państwa uwagi na program *MatNau!* – interaktywny zbiór zadań z rozwiązaniami. Wchodząc na wskazaną stronę, otrzymają Państwo dostęp do wersji demonstracyjnej programu, który ma dwa oblicza. Dla nauczycieli to interaktywny zbiór zadań (do zakresu podstawowego). Szczególnie przydatny dla tych z Państwa, którzy lubią (i mają możliwość) wykorzystywać na lekcjach nowoczesne technologie. Dla ucznia to aplikacja, która motywuje do powtórek przed sprawdzianami i pomaga poprawić oceny z matematyki. Za pomocą krótkich filmów i komentarzy wyjaśnia krok po kroku, jak rozwiązywać różne typy zadań. Dodatkowo uczniowie mogą sprawdzić swoje umiejętności, wykonując interaktywne ćwiczenia.

Zapraszamy do wypróbowania *Matematyki z plusem* w czasie zajęć z uczniami. Wszystkich zainteresowanych naszymi propozycjami dydaktycznymi zachęcamy do odwiedzenia strony **www.matematyka.gwo.pl**.

MATERIAŁY DO LEKCJI POŚWIĘCONYCH POJĘCIU TWIERDZENIE SINUSÓW

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

zadanie 7–10 — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii

— odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem

● — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)

● — zadanie trudne

W zbiorze zadań przyjęto następujące oznaczenia:

12. — zadanie łatwe

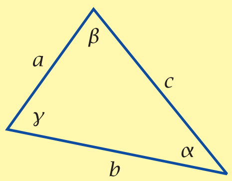
12. — zadanie o średnim poziomie trudności

12. — zadanie trudne

R — zadanie z zakresu rozszerzonego

TWIERDZENIE SINUSÓW

I Wiadomo, że w każdym trójkącie najdłuższy bok leży naprzeciwko kąta o największej mierze, a najkrótszy — naprzeciwko kąta o najmniejszej mierze. Okazuje się, że istnieją ścisłe związki między długościami boków trójkąta a miarami jego kątów.



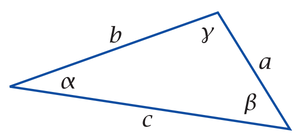
$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{\sin\alpha}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{\sin\beta}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{\sin\gamma}}$$

Twierdzenie sinusów

W trójkącie stosunki długości boków do sinusów kątów leżących naprzeciw tych boków są równe.

Dowód

Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku obok.



Pole tego trójkąta można zapisać na trzy sposoby:

$$P = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta$$

Rozważmy równość:

$$\tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha$$

Liczby: b, $\sin\alpha$, $\sin\gamma$ są różne od 0, więc tę równość możemy przekształcić:

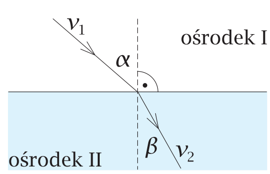
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Podobnie z równości $\tfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta$ wynika równość $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Wobec tego $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. □

Ciekawostka

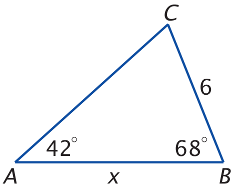
Holenderski fizyk, astronom i matematyk Snell Willebrord van Royen (zwany Snelliusem) żyjący w latach 1580–1626 jest najbardziej znany jako odkrywca prawa załamania światła (chociaż wiadomo, że znane ono było już Ptolemeuszowi prawie 1500 lat wcześniej). Równość opisująca to prawo przypomina równość z twierdzenia sinusów. Być może dlatego to twierdzenie jest czasem nazywane twierdzeniem Snelliusa.



$$\frac{v_1}{\sin\alpha} = \frac{v_2}{\sin\beta}$$

α — kąt padania
β — kąt załamania
v_1 — prędkość światła w ośrodku I
v_2 — prędkość światła w ośrodku II

PRZYKŁAD 1 W trójkącie ABC bok BC ma długość 6 cm oraz $|\sphericalangle CAB| = 42°$ i $|\sphericalangle ABC| = 68°$. Oblicz długość boku AB.



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

$|\sphericalangle ACB| = 180° - (42° + 68°) = 70°$

Obliczamy miarę kąta leżącego naprzeciwko boku AB.

$$\frac{6}{\sin 42°} = \frac{x}{\sin 70°}$$

Korzystamy z twierdzenia sinusów.

$$x = \frac{6 \sin 70°}{\sin 42°}$$

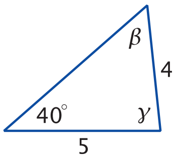
$x \approx 8{,}43$

Odp. Bok AB ma około 8,43 cm długości.

ZADANIE W trójkącie PQR bok PR ma długość 5 oraz $|\sphericalangle QPR| = 20°$ i $|\sphericalangle RQP| = 44°$. Oblicz długość boku PQ.

zadania 1–3

II **PRZYKŁAD 2** Jeden z kątów trójkąta ma miarę 40°. Bok leżący naprzeciw tego kąta ma długość 4, a inny z boków tego trójkąta ma długość 5. Oblicz miarę kąta leżącego naprzeciw tego boku.



Wykonujemy rysunek pomocniczy.

$$\frac{4}{\sin 40°} = \frac{5}{\sin \beta}$$

Korzystamy z twierdzenia sinusów.

$$\sin \beta = \frac{5 \sin 40°}{4}$$

$\sin \beta \approx 0{,}803$

$\beta_1 \approx 53°, \quad \beta_2 \approx 180° - 53° = 127°$

$0° < \beta < 180°$.

$40° + 53° < 180° \quad 40° + 127° < 180°$

Sprawdzamy, czy $40° + \beta < 180°$.

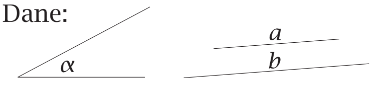
Odp. Szukany kąt ma około 53° lub około 127°.

ZADANIE Jeden z kątów trójkąta ma miarę 18°. Bok leżący naprzeciw tego kąta ma długość 10, a inny bok ma długość 20. Oblicz miary pozostałych kątów tego trójkąta.

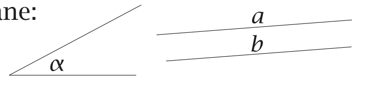
W przykładzie zadanie miało dwa rozwiązania. Nie zawsze jednak tak jest.

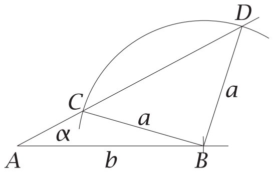
Na poniższych rysunkach przedstawiono dwie konstrukcje trójkąta, gdy dane są: jeden kąt trójkąta (α), bok leżący naprzeciw tego kąta (a) i jeden z boków leżących przy tym kącie (b).

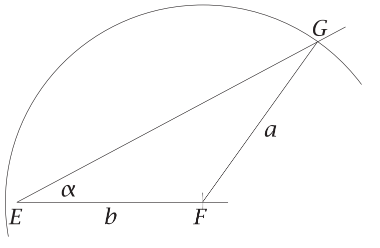
Dane:



Dane:





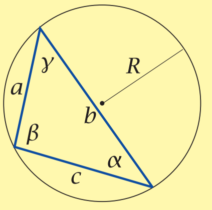


Jak widać, w zależności od długości boków a i b przyjęte warunki mogą być spełnione przez dwa trójkąty (na pierwszym rysunku trójkąty ABC i ABD) albo jeden trójkąt (na drugim rysunku trójkąt EFG).

ĆWICZENIE Sprawdź, że gdybyśmy w zadaniu z przykładu 2 zmienili długość boku 4 na długość 6, otrzymalibyśmy tylko jedno rozwiązanie.

zadania 4–8

III Twierdzenie sinusów można rozszerzyć w następujący sposób:



$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{\beta}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{\gamma}} = 2R$$

Twierdzenie

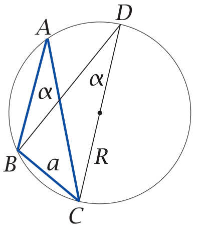
W trójkącie stosunek długości dowolnego boku do sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

Dowód

Warunek $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ wykazaliśmy już wcześniej. Co najmniej dwa z trzech kątów trójkąta muszą być kątami ostrym. Przyjmijmy, że α jest kątem ostrym. Aby udowodnić twierdzenie, wystarczy wykazać równość $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$.

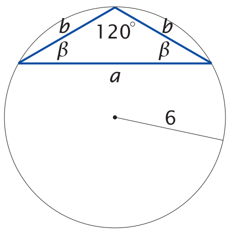
Niech ABC oznacza trójkąt wpisany w okrąg o promieniu R, w którym $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ i $|BC| = a$.

Prowadząc średnicę CD i cięciwę BD, otrzymujemy trójkąt prostokątny BCD o kącie ostrym α, gdyż $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle BDC$ są oparte na tym samym łuku. Zatem:



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin |\sphericalangle BDC|} = \frac{a}{\frac{a}{|CD|}} = |CD| = 2R \quad \square$$

PRZYKŁAD 3 W okrąg o promieniu 6 wpisano trójkąt równoramienny. Kąt między ramionami tego trójkąta ma miarę 120°. Oblicz obwód tego trójkąta.



$$\beta = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\frac{a}{\sin 120^\circ} = 12 \quad \text{i} \quad \frac{b}{\sin 30^\circ} = 12$$

Korzystamy z $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ i $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$.

$$a = 12 \cdot \sin 120^\circ = 12\sin(180^\circ - 60^\circ) = 12\sin 60^\circ =$$

$$= 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$b = 12 \cdot \sin 30^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

Obwód $= a + 2b = 6\sqrt{3} + 2 \cdot 6 = \underline{6\sqrt{3} + 12}$

ZADANIE W okrąg o promieniu 10 wpisano trójkąt o kątach 45°, 60°, 75°. Znajdź długość najkrótszego boku tego trójkąta.

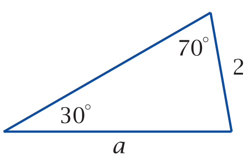
zadania 9–11

ZESTAW ZADAŃ

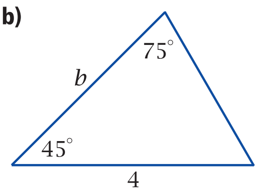
I

1. Oblicz długość odcinka oznaczonego literą.

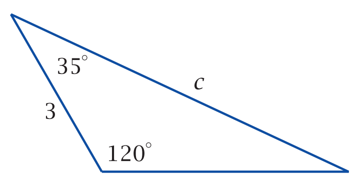
a)



b)



c)



2. a) Czy istnieje trójkąt o kątach 30°, 70°, 80° i bokach długości 5, 9, 13?

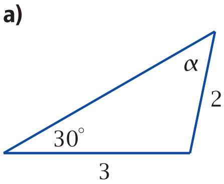
b) Czy istnieje trójkąt, w którym dwa kąty mają miary 45° i 60°, a boki leżące naprzeciw tych kątów mają długości 3 i $\sqrt{6}$?

3. Jaką długość ma najkrótszy z boków trójkąta, w którym dwa kąty mają miary 10° i 20°, a najdłuższy bok ma długość 10?

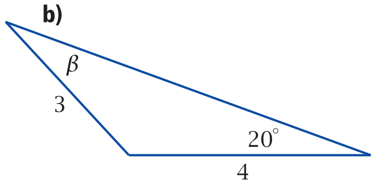
II

4. Oblicz miarę kąta oznaczonego literą.

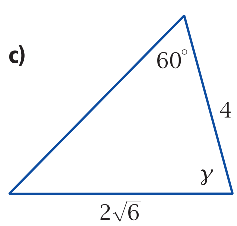
a)



b)



c)

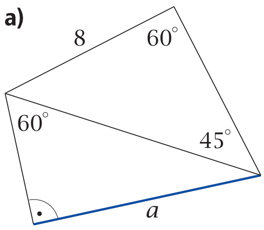


5. W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków oraz miara jednego z kątów. Znajdź miary pozostałych kątów tego trójkąta.

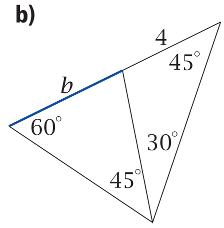
a) $|AC| = \sqrt{6},\ \ |BC| = 2,\ \ |\sphericalangle ABC| = 60°$ **b)** $|AC| = 1,\ \ |BC| = \sqrt{2},\ \ |\sphericalangle ABC| = 30°$

6. Znajdź długość odcinka oznaczonego literą.

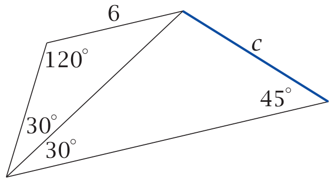
a)



b)

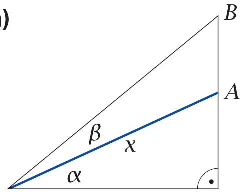


c)

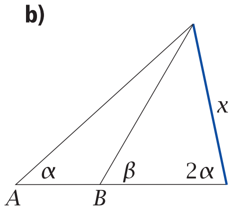


7. Przyjmijmy, że dane są kąty α i β oraz że $|AB| = a$. Znajdź x.

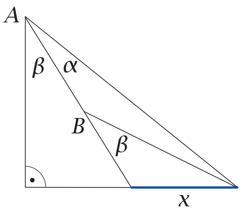
a)



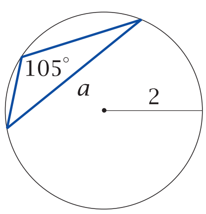
b)

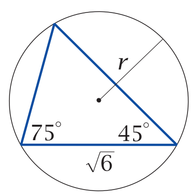


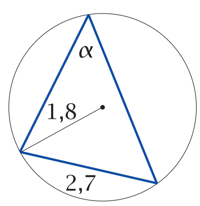
c)



III **9.** Oblicz długości odcinków a i r oraz miarę kąta α.







8. Wykaż, że jeżeli kąty α i β są kątami trójkąta i naprzeciw kąta α leży bok a, a naprzeciw kąta β leży bok b, to:

a) $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\beta}$ **b)** $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$

10. Wybieramy dowolny punkt P podstawy BC trójkąta równoramiennego ABC ($P \neq B$, $P \neq C$). Wykaż, że okrąg opisany na trójkącie APB ma taki sam promień jak okrąg opisany na trójkącie APC.

11. Przyjmijmy, że α, β i γ są kątami trójkąta oraz że naprzeciw tych kątów leżą odpowiednio boki o długościach a, b i c. Wykaż, że jeśli R oznacza długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, to pole trójkąta wyraża się wzorem:

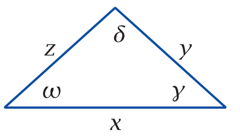
a) $P = \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$ **b)** $P = \dfrac{abc}{4R}$ **c)** $P = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$

PODRĘCZNIK (fragmenty)

Strona 204

MINISPRAWDZIAN

S1. Która z poniższych równości jest prawdziwa dla trójkąta przedstawionego na rysunku obok?



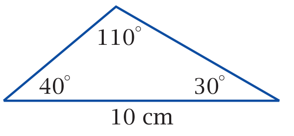
A. $z = \frac{x \cdot \sin\delta}{\sin\gamma}$

B. $\sin\omega = \frac{y \cdot \sin\gamma}{z}$

C. $y = \frac{\sin\delta \cdot z}{\sin\gamma}$

D. $\sin\delta = \frac{x \cdot y}{\sin\omega}$

S2. Długość najkrótszego boku trójkąta przedstawionego na rysunku obok wyrażona w centymetrach należy do przedziału:



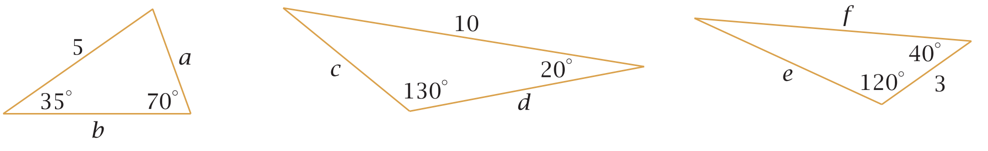
A. $(4;5)$ B. $(5;6)$ C. $(6;7)$ D. $(7;8)$

S3. W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 10$, $|BC| = 7$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 20°$. Która z poniższych miar nie może być miarą żadnego z kątów tego trójkąta, zaokrągloną do pełnych stopni?

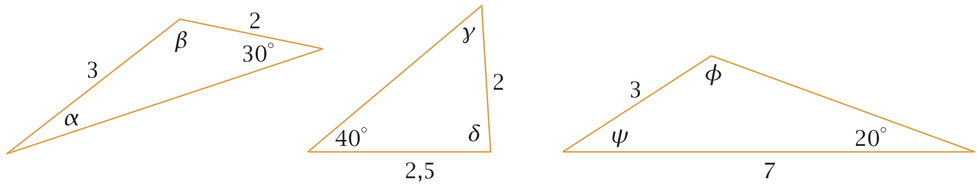
A. 29° B. 49° C. 131° D. 151°

TWIERDZENIE SINUSÓW

126. Oblicz długości odcinków oznaczonych literami.

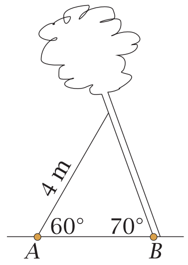


127. Oblicz miary kątów oznaczonych literami.

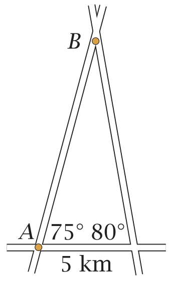


128. Znajdź długość odcinka AB.

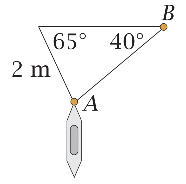
a)



b)

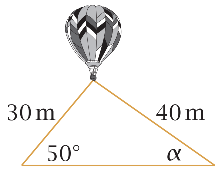


c)

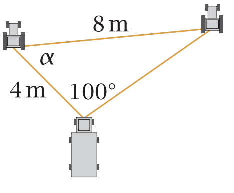


129. Znajdź miarę kąta α.

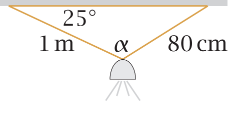
a)



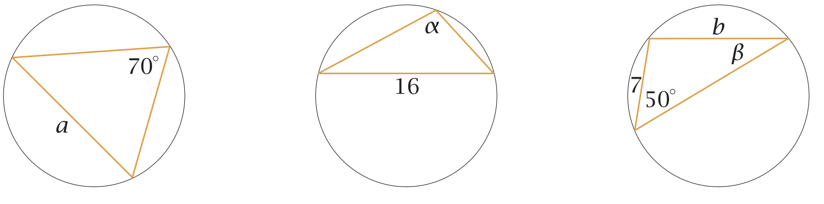
b)



c)



130. Narysowane okręgi mają promienie równe 10. Oblicz długości boków i miary kątów oznaczonych literami.



131. Oblicz brakujące długości boków i miary kątów w trójkącie ABC.

a) $|AB| = 10$, $|BC| = 15$, $|\sphericalangle ACB| = 20°$

b) $|AB| = 5$, $|AC| = 8$, $|\sphericalangle ABC| = 40°$

c) $|AB| = 8$, $|BC| = 4$, $|\sphericalangle ACB| = 30°$

d) $|BC| = 5$, $|AC| = 7$, $|\sphericalangle BAC| = 40°$

e) $|AB| = 20$, $|\sphericalangle ABC| = 30°$, $|\sphericalangle ACB| = 70°$

f) $|AB| = 5$, $|\sphericalangle CAB| = 20°$, $|\sphericalangle ABC| = 150°$

132. a) Dwa spośród kątów trójkąta mają miary 20° i 30°. Jaki jest stosunek długości najdłuższego boku do najkrótszego?

b) Najkrótszy bok trójkąta ma długość 20 cm, najdłuższy 30 cm. Jaka jest długość trzeciego boku, jeśli najmniejszy kąt ma miarę 40°?

133. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o promieniu 5 i $|AB| = 5$. Oblicz miary kątów tego trójkąta, gdy bok BC ma długość:

a) 1 b) 3 c) 7

134. a) Oblicz długości boków trójkąta o kątach 30°, 50°, 100° wpisanego w okrąg o średnicy 20.

b) Oblicz długość promienia okręgu opisanego na trójkącie o kątach 20°, 75°, 85° i najkrótszym boku długości 5.

135. Podstawa trójkąta równoramiennego ma długość 4, a każde z jego ramion ma długość 8.

a) Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

b) Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

136. Krótsza przekątna równoległoboku ma długość 5 i dzieli jego kąt na kąty o miarach 45° i 80°. Oblicz długości boków tego równoległoboku.

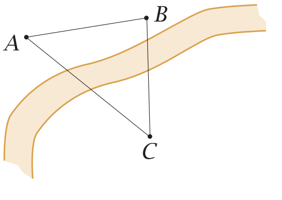
137. W pewnym trójkącie naprzeciwko kąta α leży bok długości 3, a naprzeciwko kąta 2α leży bok długości 5. Korzystając ze wzoru $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, oblicz miarę największego kąta w tym trójkącie.

138. Przeczytaj informacje podane w poniższej ramce.

W wyniku pomiarów geodezyjnych powstają mapy i wytyczane jest położenie budowanych obiektów. Geodeta posługuje się przyrządami pozwalającymi na określenie odległości, miar kątów, a także różnicy poziomów w terenie. Często jednak bezpośredni pomiar szukanej wielkości jest niemożliwy i wtedy geodeta może korzystać z twierdzenia sinusów lub twierdzenia cosinusów. Przykładem takiej sytuacji jest problem zwany w geodezji „wcięciem w przód".

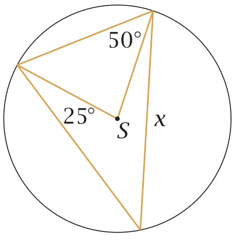
Wcięcie w przód

Znana jest odległość między punktami A i B oraz miary kątów $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BAC$ (zob. rysunek). Należy obliczyć odległości $|AC|$ i $|BC|$.



Rozwiąż problem „wcięcia w przód", jeżeli $|AB| = 500$ m, $|\sphericalangle ABC| = 78°$ oraz $|\sphericalangle BAC| = 64°$.

139. Na rysunku obok punkt S jest środkiem okręgu o promieniu 3. Oblicz długość odcinka x z dokładnością do części dziesiątych.

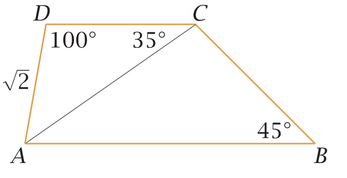


140. W pewnym trójkącie, w którym naprzeciwko boku długości a leży kąt α, a naprzeciwko boku długości b leży kąt β, zachodzi równość:

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta}$$

Co można powiedzieć o długościach boków a i b?

141. Przekątna AC trapezu $ABCD$ podzieliła go na dwa trójkąty, jak pokazano na rysunku obok. Oblicz długość ramienia BC tego trapezu.



142. Punkt P jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Wykaż, że promienie okręgów opisanych na trójkątach ABC, ABP, ACP i BCP mają równe długości.

143. a) Trójkąt prostokątny ABC ma przyprostokątne $|AB| = 4$, $|AC| = 1$. Punkt D leży na przeciwprostokątnej, a półprosta AD jest dwusieczną kąta prostego. Oblicz $|AD|$.

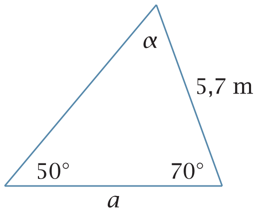
b) Dwusieczna kąta prostego w trójkącie prostokątnym dzieli przeciwprostokątną w stosunku $1:3$. Oblicz miary kątów tego trójkąta.

144. Z wierzchołka kąta prostego trójkąta równoramiennego poprowadzono

TWIERDZENIE SINUSÓW

1. Oblicz długość boku oznaczonego literą.

a)



$\alpha = 180° - \ldots\ldots = \ldots\ldots$

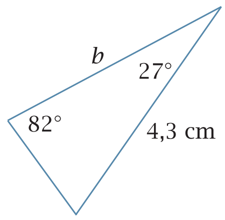
$\dfrac{5{,}7}{\sin 50°} = \dfrac{a}{\ldots\ldots}$

$a \sin 50° = \ldots\ldots$

$a = \dfrac{\ldots\ldots}{\sin 50°}$

$a \approx \ldots\ldots$

b)

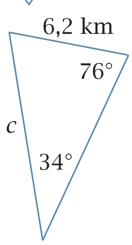


....

....

....

c)



....

....

....

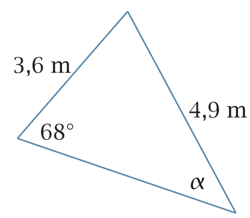
2. Dla trójkąta przedstawionego poniżej istnieje tylko jedna miara kąta α, dla której spełnione są warunki podane na rysunkach. Znajdź tę miarę.

a) $\dfrac{4{,}9}{\sin 68°} = \dfrac{\ldots\ldots}{\sin \alpha}$

$4{,}9 \sin \alpha = \ldots\ldots$

$\sin \alpha = \dfrac{\ldots\ldots}{4{,}9}$

$\alpha \approx \ldots\ldots$

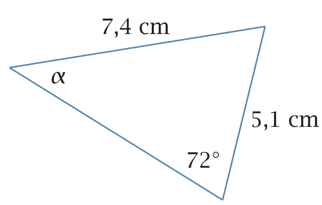


b) ....

....

....

....

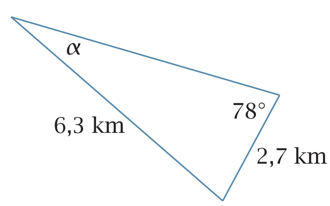


c) ....

....

....

....

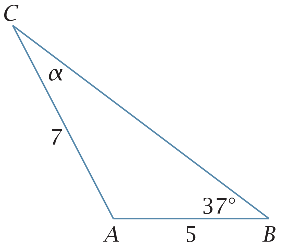


TWIERDZENIE SINUSÓW

3. Dla każdego zestawu warunków dotyczących trójkąta ABC istnieją dwie możliwe miary kąta $\sphericalangle ACB$. Znajdź te miary.

a) $|AB| = 5$, $|AC| = 7$, $|\sphericalangle ABC| = 37°$

rysunek pomocniczy



$\frac{.....}{\sin 37°} = \frac{.....}{\sin \alpha}$

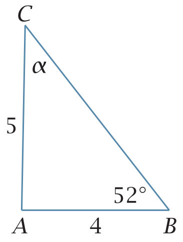
..... $\sin \alpha =$ ....

$\sin \alpha =$ ....

$\alpha \approx$ .... lub $\alpha \approx 180° -$ .... = ...

b) $|AB| = 4$, $|AC| = 5$, $|\sphericalangle ABC| = 52°$

rysunek pomocniczy



....

....

....

....

c) $|AB| = 2$, $|AC| = 3$, $|\sphericalangle ABC| = 25°$

rysunek pomocniczy

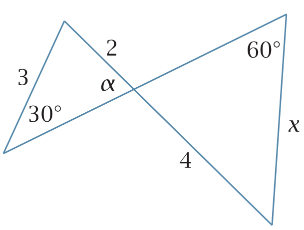
....

....

....

....

4. Korzystając z informacji zamieszczonych na rysunku, oblicz długość odcinka x.



$\frac{3}{\sin \alpha} =$ .... , stąd $\sin \alpha =$ ....

$\frac{x}{.......} =$ ....

....

....

MATERIAŁY DO LEKCJI POŚWIĘCONYCH POJĘCIU TWIERDZENIE COSINUSÓW

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

zadanie 7–10 ▶ — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii

◀ III — odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem III

● — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)

● — zadanie trudne

W zbiorze zadań przyjęto następujące oznaczenia:

12. — zadanie łatwe

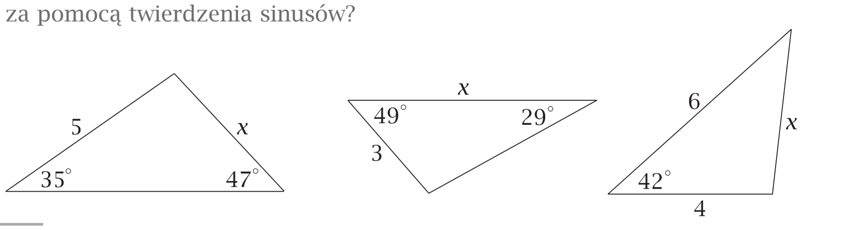
12. — zadanie o średnim poziomie trudności

12. — zadanie trudne

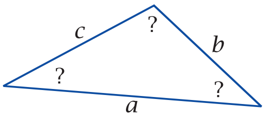
R — zadanie z zakresu rozszerzonego

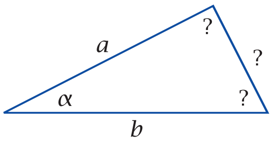
TWIERDZENIE COSINUSÓW

I **ĆWICZENIE** W którym z poniższych trójkątów można obliczyć długość boku x za pomocą twierdzenia sinusów?



W sytuacji gdy dane są trzy boki trójkąta, trójkąt wyznaczony jest jednoznacznie. Powinniśmy zatem być w stanie obliczyć miary jego kątów.



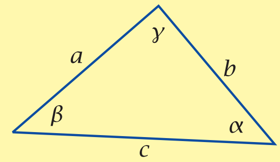


Jest podobnie, gdy dany jest jeden kąt i długości dwóch boków leżących przy tym kącie. W takim trójkącie także powinniśmy być w stanie obliczyć długość trzeciego boku i miary dwóch pozostałych kątów.

Ani w jednym, ani w drugim wypadku nie można znaleźć brakujących wielkości, korzystając jedynie z twierdzenia sinusów. Możemy jednak skorzystać z następującej zależności między bokami a kątami w trójkącie.

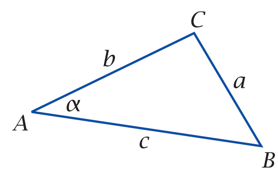
Twierdzenie cosinusów

W trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta między nimi.



$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$
$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$
$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

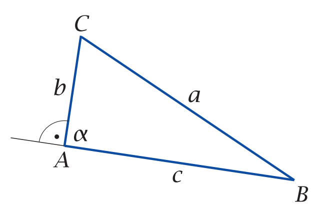
Dowód



Przyjmijmy oznaczenia takie jak na rysunku obok. Pokażemy, że zachodzi równość:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

1. Załóżmy najpierw, że α jest kątem prostym.



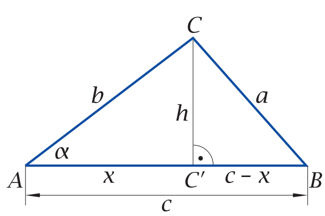
Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ponieważ $\cos 90^\circ = 0$, więc $2bc\cos 90^\circ = 0$ i możemy zapisać równość:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 90^\circ$$

2. Załóżmy teraz, że kąt α jest kątem ostrym.



W każdym trójkącie co najmniej dwa kąty są ostre, możemy zatem założyć, że kąt ABC także jest ostry. Wobec tego wysokość h trójkata poprowadzona z wierzchołka C dzieli bok AB na dwa odcinki (zob. rysunek).

Ponieważ $\cos\alpha = \frac{x}{b}$ i $\sin\alpha = \frac{h}{b}$, więc:

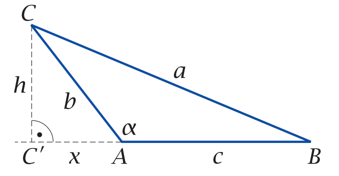
$x = b\cos\alpha$ i $h = b\sin\alpha$

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta $CC'B$, otrzymujemy:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$
$$a^2 = b^2\sin^2\alpha + (c - b\cos\alpha)^2$$
$$a^2 = b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha$$
$$a^2 = b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

3. Rozważmy teraz przypadek, gdy α jest kątem rozwartym.

Prowadząc z wierzchołka C wysokość h, otrzymamy dwa trójkąty prostokątne $C'AC$ i $C'BC$ (zob. rysunek).



Ponieważ $\cos(180°-\alpha) = \frac{x}{b}$ i $\sin(180°-\alpha) = \frac{h}{b}$, a ponadto:

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ i $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$,

więc: $x = -b\cos\alpha$ i $h = b\sin\alpha$

Stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta $CC'B$, otrzymujemy:

$$a^2 = h^2 + (c + x)^2$$

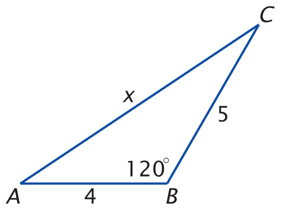
$$a^2 = b^2\sin^2\alpha + (c - b\cos\alpha)^2$$

$$a^2 = b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha$$

$$a^2 = b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \square$$

PRZYKŁAD 1 W trójkącie ABC dane są: $|AB| = 4$, $|BC| = 5$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 120°$. Oblicz długość boku AC tego trójkąta.



Sporządzamy rysunek pomocniczy.

$x^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 120°$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

$x^2 = 16 + 25 - 40\cos 120°$

$\cos 120° = -\cos(180° - 120°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

$x^2 = 41 - 40 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 = 61$

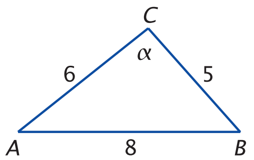
$x = \sqrt{61}$

Literą x oznaczyliśmy długość boku trójkąta, więc bierzemy pod uwagę tylko dodatnie rozwiązanie równania $x^2 = 61$.

Odp. Bok AC trójkąta ABC ma długość $\sqrt{61}$.

ZADANIE W trójkącie PQR dane są: $|PQ| = 7$, $|PR| = 3$ i $|\sphericalangle QPR| = 45°$. Oblicz długość boku QR tego trójkąta.

PRZYKŁAD 2 Boki trójkąta ABC mają długości $|AB| = 8$, $|BC| = 5$ oraz $|AC| = 6$. Oblicz miarę kąta ACB.



Wykonujemy rysunek pomocniczy.

$8^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos\alpha$

Korzystamy z twierdzenia cosinusów.

$64 = 61 - 60\cos\alpha$

$3 = -60\cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{1}{20}$

Odczytujemy miarę kąta, którego cosinus jest równy $\frac{1}{20}$, i korzystamy z równości $-\cos\alpha = \cos(180° - \alpha)$.

$\alpha \approx 93°$

$\cos\alpha \approx -\cos 87° = \cos(180° - 87°) = \cos 93°$

Odp. Kąt ACB ma miarę około 93°.

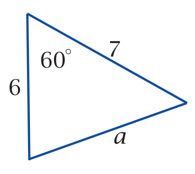
ZADANIE Boki trójkąta mają długości 3, 5 i 7. Oblicz miarę największego kąta tego trójkąta.

zadania 1–13

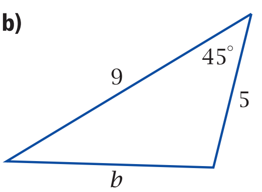
ZESTAW ZADAŃ

I **1.** Oblicz długość boku oznaczonego literą.

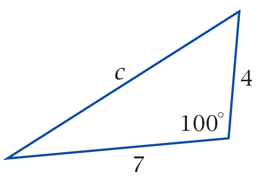
a)



b)

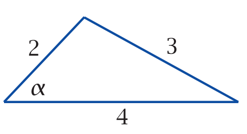


c)

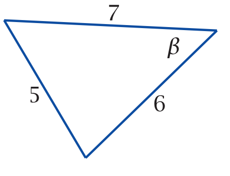


2. Oblicz miarę kąta oznaczonego literą.

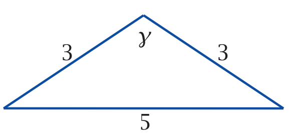
a)



b)



c)



3. Czy trójkąt o danych długościach boków jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny?

a) 5, 12, 13 **b)** 4, 5, 6 **c)** 5, 7, 9

4. Przekątne równoległoboku przecinają się pod kątem 60°, a ich długości wynoszą 2 i 6. Znajdź długości boków równoległoboku.

Warto wiedzieć!

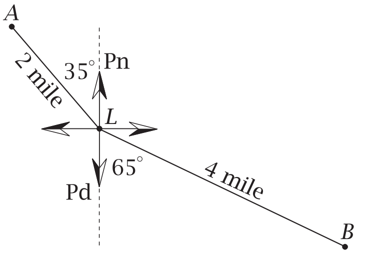
Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa można uogólnić w następujący sposób:

Jeśli a, b i c są długościami boków trójkąta oraz $a \leqslant c$ i $b \leqslant c$, to trójkąt ten jest:

- prostokątny, gdy $a^2 + b^2 = c^2$,
- rozwartokątny, gdy $a^2 + b^2 < c^2$,
- ostrokątny, gdy $a^2 + b^2 > c^2$.

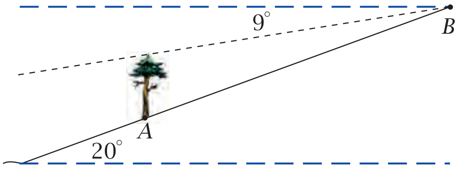
5. Uzasadnij twierdzenie podane w ramce, a następnie, korzystając z niego, rozwiąż zadanie 3.

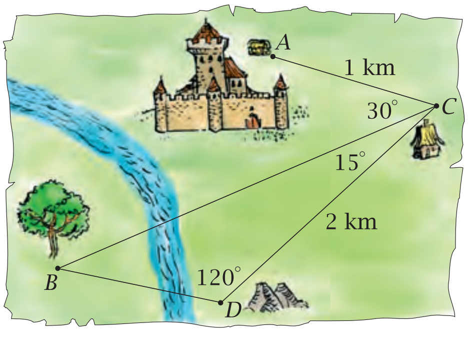
Uwaga. Przy rozwiązywaniu zadań 6–13 przyda się twierdzenie cosinusów albo twierdzenie sinusów. W niektórych zadaniach trzeba skorzystać z obu tych twierdzeń.



6. Rysunek przedstawia położenie statków A i B względem latarni L. Znajdź odległość między statkami.

7. Na rysunku obok niebieskie linie przerywane są równoległe. Oblicz wysokość drzewa, jeśli $|AB| = 150$ m.

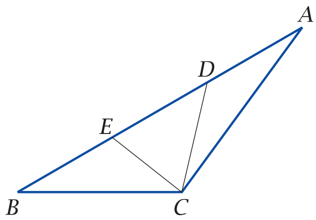




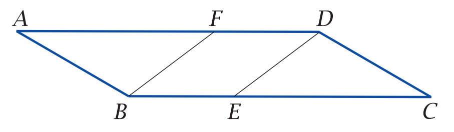
8. Korzystając z informacji przedstawionych na mapce, oblicz odległość między punktami A i B.

9. Boki trójkąta mają długości 2, 3 i 4. Jaką długość ma wysokość tego trójkąta opuszczona na najdłuższy bok?

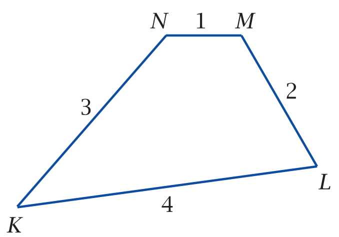
10. Na poniższym rysunku zaznaczono punkty D i E, które dzielą bok AB trójkąta ABC na trzy równe części. Wiedząc, że $|AB| = 6$, $|AC| = 5$ i $|\sphericalangle DAC| = 30°$, znajdź długości odcinków CD i CE.



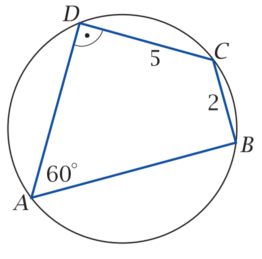
11. W równoległoboku $ABCD$ przedstawionym na rysunku poniżej dane są: $|AB| = \sqrt{3}$, $|AD| = 4$ oraz $|\sphericalangle BAD| = 30°$. Czworokąt $BEDF$ jest rombem. Znajdź długość jego boku.



12. W czworokącie $KLMN$ przedstawionym na rysunku poniżej kąt LMN ma miarę 120°. Oblicz pole tego czworokąta.

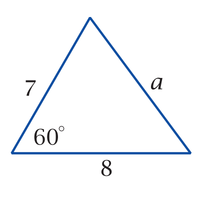


13. Popatrz na rysunek poniżej. Jaką długość ma promień okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$?



MINISPRAWDZIAN

S1. Długość boku oznaczonego na rysunku literą a spełnia warunek:

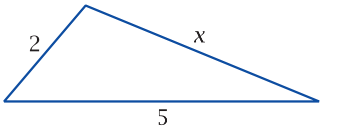


A. $a \in (0;7\rangle$ C. $a \in (8;9\rangle$
B. $a \in (7;8\rangle$ D. $a \in (9;+\infty)$

S2. Trójkąt ma boki o długościach 4, 5 i 6. Miara najmniejszego kąta tego trójkąta, po zaokrągleniu do pełnych stopni, wynosi:

A. 30° B. 38° C. 40° D. 41°

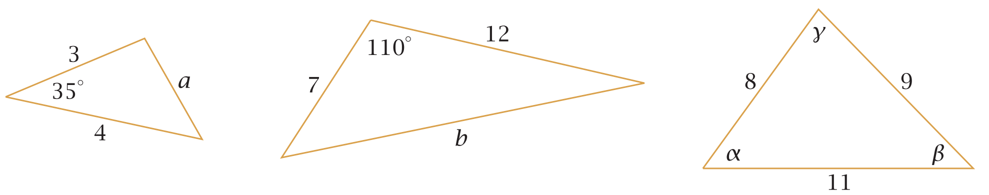
S3. Pole trójkąta przedstawionego na rysunku obok wynosi 3. Długość boku x jest zatem równa:



A. 3 B. 4 C. $\sqrt{13}$ D. $\sqrt{26}$

TWIERDZENIE COSINUSÓW

149. Oblicz długości boków a i b oraz miary kątów α, β i γ.



150. Oblicz miary kątów trójkąta o bokach długości:

a) 4, 6, 7 b) 4, 5, 8 c) 10, 12, 13

151. W trójkącie ABC dane są długości dwóch boków i miara jednego z kątów. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.

a) $|BC| = 5$, $|AC| = 2$, $|\sphericalangle BCA| = 20^\circ$

b) $|BC| = 3$, $|AB| = 4$, $|\sphericalangle ABC| = 110^\circ$

c) $|AB| = 5$, $|AC| = 4$, $|\sphericalangle CAB| = 40^\circ$

152. Pomiędzy słupkami A, B i C rozciągnięto linę o długości 30 m. Odległość między słupkami A i B wynosi 10 m. Oblicz miarę kąta ACB, gdy odległość między słupkami B i C będzie równa 8 m.

153. Oblicz brakujące długości boków i miary kątów trójkąta KLM.

a) $|KM| = 7$, $|KL| = 10$, $|\sphericalangle MKL| = 80^\circ$

b) $|KL| = 5$, $|LM| = 7$, $|\sphericalangle KLM| = 50^\circ$

c) $|KL| = 7$, $|LM| = 6$, $|\sphericalangle MKL| = 30^\circ$

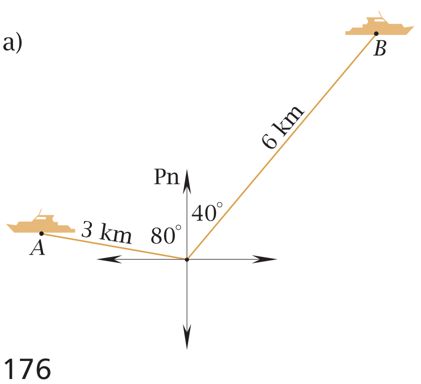
d) $|LM| = 10$, $|KM| = 13$, $|\sphericalangle KLM| = 110^\circ$

e) $|KM| = 10$, $|LM| = 6$, $|\sphericalangle KML| = 10^\circ$

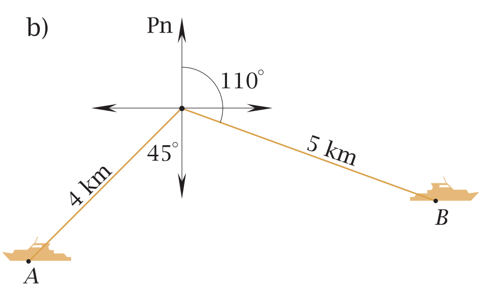
f) $|LM| = 7$, $|\sphericalangle KLM| = 50^\circ$, $|\sphericalangle LMK| = 100^\circ$

154. Oblicz odległość między statkami A i B.

a)



b)



155. Czy trójkąt o podanych długościach boków jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny?

a) 10, 12, 21
b) 3, 4, 4
c) 12, 13, 5
d) 10, 11, 14
e) 5, 5, 8
f) 7, 12, 13

156. a) Oblicz pole trójkąta o bokach długości 5, 7, 10.

b) Oblicz długość najkrótszej wysokości trójkąta o bokach długości 6, 7, 8.

157. a) W trójkącie o bokach długości 4, 8 i 10 poprowadzono środkową łączącą wierzchołek z najdłuższym bokiem. Oblicz długość tej środkowej.

b) W trójkącie ABC boki AB i AC mają długości odpowiednio 4 i 6, a środkowa poprowadzona z wierzchołka A ma długość $\sqrt{10}$. Oblicz długość boku BC.

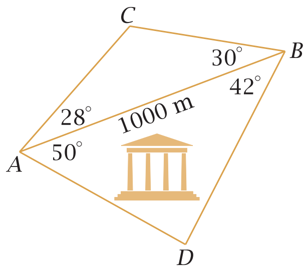
c) W trójkącie ABC dane są: $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = 70°$, $|AB| = 5$. Oblicz długość środkowej AD.

158. Jeden z boków równoległoboku jest o 3 dłuższy od drugiego, kąt ostry tego równoległoboku ma miarę 60°, a dłuższa przekątna ma długość $3\sqrt{7}$. Oblicz długość drugiej przekątnej.

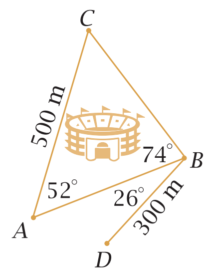
159. Podstawy trapezu mają długości 12 i 4, a jedno z jego ramion ma długość 6. Kąt między drugim ramieniem a podstawą ma miarę 40°. Oblicz długość drugiego ramienia i miary pozostałych kątów trapezu.

160. Na schematycznym rysunku przedstawiono wyniki pomiarów geodezyjnych. Oblicz odległość między punktami C i D.

a)



b)



161. a) Wykaż, że suma kwadratów długości czterech boków równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości jego przekątnych.

b) Boki trójkąta mają długości a, b i c. Jaką długość ma środkowa trójkąta poprowadzona do boku o długości a?

162. Do kołków A i B odległych od siebie o 4 m przywiązano sznur długości 6 m. W punkcie C naciągnięto sznur tak, że $|\sphericalangle ACB| = 60°$. W jakich odległościach od końców sznura znajduje się punkt C?

163. a) Podstawy trapezu mają długości 10 i 15, a ramiona są równe 6 i 8. Oblicz długości przekątnych tego trapezu.

b) Krótsza podstawa trapezu równoramiennego ma długość 2, przekątna ma długość 6, a kąt między przekątnymi ma miarę 30°. Oblicz długość drugiej podstawy tego trapezu.

c) Podstawy trapezu mają długości 3 i 11, a przekątne mają długości 6 i 10. Oblicz miarę większego z kątów między przekątnymi.

164. Boki czworokąta $ABCD$ mają długości: $|AB| = 1$, $|BC| = 2$, $|CD| = 3$ oraz $|DA| = 4$, a kąt BCD jest prosty. Znajdź miary pozostałych kątów tego czworokąta.

165. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg oraz $|AB| = 5$, $|BC| = 6$, $|CD| = 7$ i $|AD| = 8$.

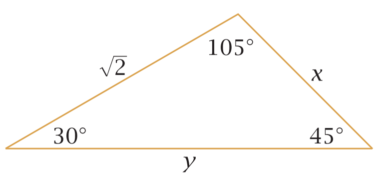
a) Oblicz miary kątów tego czworokąta.

b) Oblicz długości przekątnych tego czworokąta.

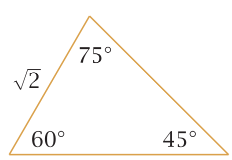
166. W trójkącie ABC boki BC i AC mają długości a i b, a kąt ACB ma miarę α. Dwusieczna tego kąta przecina bok AB w punkcie P. Znajdź długość odcinka CP, jeżeli:

a) $\alpha = 120°$ b) $\alpha = 90°$ c) $\alpha = 60°$

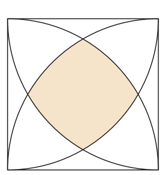
167. a) Oblicz długości boków x i y, a następnie — dokładną wartość $\cos 105°$.



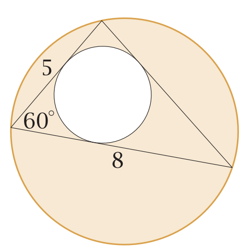
b) Skorzystaj z poniższego rysunku do obliczenia dokładnej wartości $\cos 75°$.



168. Zacieniowana figura jest ograniczona łukami okręgów o środkach w wierzchołkach kwadratu i promieniach równych długości boku kwadratu. Oblicz pole tej figury, gdy długość boku kwadratu jest równa 1.



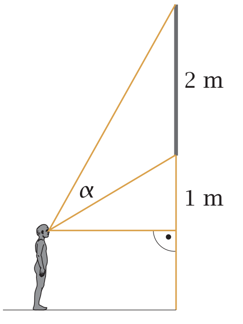
169. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.



170. a) Oblicz długość przekątnej pięciokąta foremnego o boku długości a.

b) Oblicz długości przekątnych siedmiokąta foremnego o boku długości a.

171. Chłopiec patrzy na obraz wiszący na ścianie. Obraz ma wysokość 2 m, a jego dolna krawędź jest umieszczona 1 m powyżej poziomej linii przebiegającej na wysokości oczu chłopca.



a) W jakiej odległości od ściany, na której wisi obraz, powinien stanąć chłopiec, aby kąt α widzenia obrazu miał miarę 30°?

b) Wykaż, że chłopiec nie może stanąć w takiej odległości od ściany, aby miara kąta α była równa 45°.

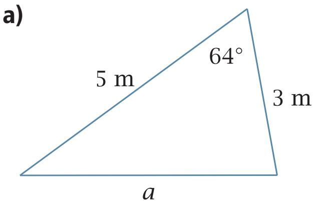
c) Chłopiec patrzy teraz na obraz o wysokości 3 m, którego dolna krawędź jest umieszczona na tej samej wysokości co pierwszy obraz. W jakiej odległości od ściany, na której wisi obraz, powinien stanąć chłopiec, aby kąt α widzenia obrazu miał miarę 30°?

172. W okrąg o promieniu 7 wpisano czworokąt $ABCD$. Boki AB i BC mają równe długości, a kąt ADC ma miarę 120°. Przekątna BD dzieli czworokąt na trójkąty, z których trójkąt ABD ma pole dwa razy większe od trójkąta BCD. Oblicz obwód tego czworokąta.

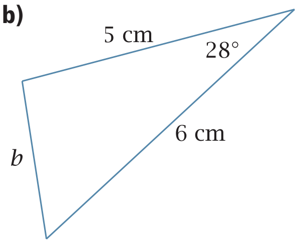
ĆWICZENIA PODSTAWOWE (fragmenty)
Strona 73

1. Oblicz długość boku oznaczonego literą.

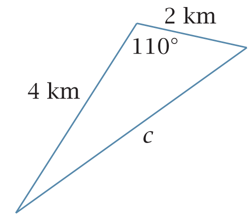
a)



b)



c)



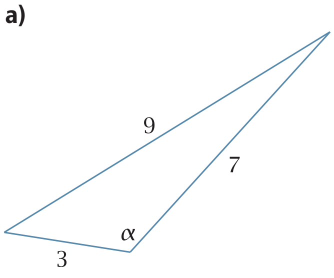
$a^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 64°$ ....

$a^2 \approx$ ....

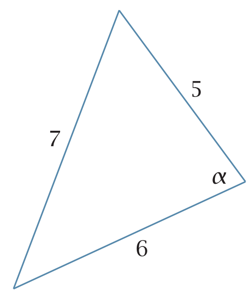
$a \approx$ ....

2. Znajdź miarę kąta α.

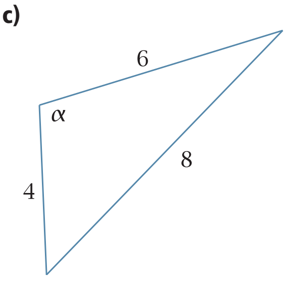
a)



b)



c)



$9^2 = 7^2 + 3^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \cos \alpha$ ....

$81 =$ ..... + ... $- 42 \cos \alpha$ ....

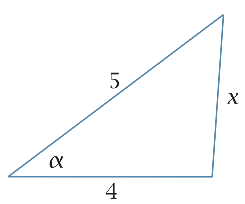
$42 \cos \alpha =$ ....

$\cos \alpha = \frac{\dots}{42}$ ....

$\alpha \approx$ ....

3. Dwa boki trójkąta ostrokątnego mają długości 4 i 5, a pole trójkąta jest równe 6. Oblicz długość trzeciego boku.

rysunek pomocniczy



Pole $= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin \alpha$

.... $= 10 \cdot \sin \alpha$

$\sin \alpha =$ ....

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \ \alpha \in (0°; 90°)$

.... $+ \cos^2 \alpha = 1$

$\cos^2 \alpha =$ ....

$\cos \alpha =$ ....

$x^2 =$ ....

$x =$ ....

KARTY PRACY UTWORZONE
Z WYKORZYSTANIEM *KOMPOZYTORA KLASÓWEK I KART PRACY*

Więcej informacji o programie na www.matematyka.kompozytorklasowek.gwo.pl.

Zestaw zadań

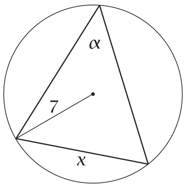
str. 1/2
grupa **A**

....
imię i nazwisko lp. w dzienniku klasa data

1. W trójkącie równoramiennym ramię o długości 30 jest nachylone do podstawy pod kątem, którego sinus jest równy 0,6. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

   A. 30 B. 18 C. 25 D. 24

2. Oblicz x, wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{3}{4}$.



3. W pewnym trójkącie cosinus największego kąta jest równy $-\frac{1}{5}$, a długość najdłuższego boku wynosi 7. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

   A. $\frac{35}{2}$ B. $\frac{35\sqrt{3}}{12}$ C. $\frac{35\sqrt{6}}{24}$ D. $\frac{35}{8}$

4. W trójkącie dwa kąty mają miary 10° i 20°, a najdłuższy bok ma długość 12. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

5. Dłuższa przekątna równoległoboku ma długość $10\sqrt{5}$ i dzieli jego kąt ostry na kąty o miarach 18° i 27°. Oblicz długości boków tego równoległoboku. Wynik podaj z dokładnością do całości.

grupa **A** str. 2/2

6. W trójkącie dwa kąty mają miary 30° i 45°, długość najkrótszego boku jest równa 8. Oblicz długość najdłuższego boku tego trójkąta. Wynik zaokraglij do części dziesiątych.

7. Cosinus kąta między ramionami trójkąta równoramiennego jest równy $\frac{7}{9}$, a jego podstawa ma długość 6. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

8. Na płaskim terenie rośnie drzewo odchylone od pionu o 20° w kierunku północnym. Oblicz, jaka jest wysokość drzewa, jeżeli w samo południe, gdy promienie słoneczne padają pod kątem 50° do powierzchni ziemi, rzuca ono cień o długości 15 metrów. Wynik podaj z dokładnością do części dziesiątych metra.

Zestaw zadań

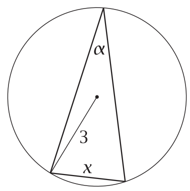
str. 1/2
grupa **B**

....
imię i nazwisko lp. w dzienniku klasa data

1. W trójkącie równoramiennym ramię o długości 40 jest nachylone do podstawy pod kątem, którego sinus jest równy 0,8. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

   A. 25 B. 24 C. 40 D. 20

2. Oblicz x, wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{3}{7}$.



3. W pewnym trójkącie cosinus największego kąta jest równy $-\frac{2}{7}$, a długość najdłuższego boku wynosi 9. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

   A. $\frac{21\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{63}{10}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{12}$ D. $\frac{21\sqrt{5}}{10}$

4. W trójkącie dwa kąty mają miary 20° i 40°, a najdłuższy bok ma długość $8\sqrt{3}$. Oblicz długości pozostałych boków tego trójkąta.

5. Krótsza przekątna równoległoboku ma długość $2\sqrt{7}$ i dzieli jego kąt rozwarty na kąty o miarach 41° i 109°. Oblicz długości boków tego równoległoboku. Wynik podaj z dokładnością do całości.

grupa **B** str. 2/2

6. W trójkącie dwa kąty mają miary 30° i 45°, długość najkrótszego boku jest równa 10. Oblicz długość najdłuższego boku tego trójkąta. Wynik zaokraglij do części dziesiątych.

7. Cosinus kąta między ramionami trójkąta równoramiennego jest równy $\frac{7}{8}$, a jego podstawa ma długość 4. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

8. Na płaskim terenie rośnie drzewo odchylone od pionu o 20° w kierunku północnym. Oblicz, jakiej długości cień rzuca 20-metrowe drzewo w samo południe, gdy promienie słoneczne padają pod kątem 50° do powierzchni ziemi. Wynik podaj z dokładnością do części dziesiątych metra.

str. 1/2

Zestaw zadań

grupa **A**

.... imię i nazwisko .... lp. w dzienniku .... klasa .... data

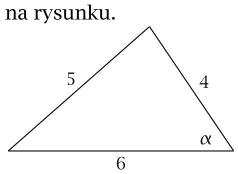
1. Pole trójkąta o bokach długości 4, 5, 6 jest równe:

   A. $\frac{35}{4}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{15\sqrt{7}}{4}$ D. $\frac{63}{32}$

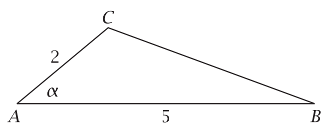
2. Trójkątem ostrokątnym jest trójkąt o bokach długości:

   A. $9, 12, 15$ B. $12, 13, 20$ C. $7, 8, 9$ D. $4, 5, 7$

3. Oblicz cosinus kąta α przedstawionego na rysunku.



4. O trójkącie ABC przedstawionym na rysunku wiadomo, że $\cos\alpha = \frac{3}{4}$. Oblicz długość boku BC.



5. W trójkącie dwa boki mają długości 3 i 5, a miara kąta między nimi wynosi 60°. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.

6. W trójkącie o polu równym $4\sqrt{21}$ kąt między dwoma bokami o długościach 5 i 8 jest rozwarty. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.

7. Dwa boki trójkąta mają długości 5 i 7, a cosinus kąta leżącego naprzeciw boku o długości 7 wynosi $-\frac{1}{5}$. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.

8. W równoległoboku o kącie ostrym 60° i obwodzie równym 20 krótsza przekątna ma długość $2\sqrt{7}$. Oblicz długość dłuższej przekątnej tego równoległoboku.

9. Do kołków A i B odległych od siebie o 5 m przywiązano sznur długości 8 m. Następnie sznur naciągnięto i zaczepiono w punkcie C tak, że $|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$. W jakich odległościach od punktów A i B znajduje się punkt C? Odpowiedź podaj z dokładnością do części dziesiątych metra.

str. 1/2

Zestaw zadań

grupa **B**

.... imię i nazwisko .... lp. w dzienniku .... klasa .... data

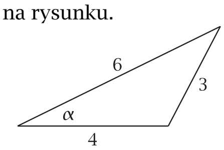
1. Pole trójkąta o bokach długości 4, 6, 8 jest równe:

   A. 9 B. $3\sqrt{15}$ C. 3 D. 45

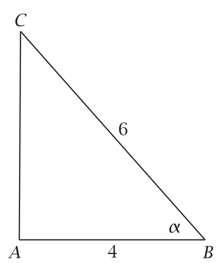
2. Trójkątem ostrokątnym jest trójkąt o bokach długości:

   A. $5, 6, 7$ B. $8, 8\sqrt{3}, 16$ C. $4, 6, 8$ D. $\sqrt{10}, 4, 6$

3. Oblicz cosinus kąta α przedstawionego na rysunku.



4. O trójkącie ABC przedstawionym na rysunku wiadomo, że $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Oblicz długość boku AC.



5. W trójkącie dwa boki mają długości 8 i 16, a miara kąta między nimi wynosi 60°. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.

grupa **B** str. 2/2

6. W trójkącie o polu równym $6\sqrt{5}$ kąt między dwoma bokami o długościach 4 i 7 jest rozwarty. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.

7. Dwa boki trójkąta mają długości 7 i 9, a cosinus kąta leżącego naprzeciw boku o długości 9 wynosi $\frac{2}{7}$. Oblicz długość trzeciego boku tego trójkąta.

8. W równoległoboku o kącie rozwartym 120° i obwodzie równym 30 krótsza przekątna ma długość $3\sqrt{7}$. Oblicz długość dłuższej przekątnej tego równoległoboku.

9. Do kołków A i B odległych od siebie o 4 m przywiązano sznur długości 7 m. Następnie sznur naciągnięto i zaczepiono w punkcie C tak, że $|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$. W jakich odległościach od punktów A i B znajduje się punkt C? Odpowiedź podaj z dokładnością do części dziesiątych metra.

MATERIAŁY DODATKOWE DO WYKORZYSTANIA PRZY REALIZACJI DZIAŁU *TRYGONOMETRIA*

ZNAJDŹ BŁĄD
TRYGONOMETRIA

ZAKRES PODSTAWOWY

Zadanie 1. Korzystając z funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45° i 60°, podaj kontrprzykład, za pomocą którego można wykazać, że poniższa równość jest fałszywa.

a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha$

b) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha - \cos\beta$

c) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta$

Zadanie 2. Boki trójkąta ABC mają długości: $|AB| = 5$, $|BC| = 5\sqrt{7}$ i $|AC| = 15$, a ponadto $|\sphericalangle BAC| = 60°$. Dwie dziewczyny, Ala i Ula, obliczyły miarę kąta ABC tego trójkąta, ale otrzymały różne wyniki.

Obliczenia Ali

$$\frac{|BC|}{\sin\sphericalangle BAC} = \frac{|AC|}{\sin\sphericalangle ABC}$$

$$\frac{5\sqrt{7}}{\sin 60°} = \frac{15}{\sin\sphericalangle ABC}$$

$$\frac{5\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{15}{\sin\sphericalangle ABC}$$

$$\sin\sphericalangle ABC = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$|\sphericalangle ABC| \approx 79°$$

Obliczenia Uli

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos\sphericalangle ABC$$

$$15^2 = 5^2 + (5\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{7} \cdot \cos\sphericalangle ABC$$

$$225 = 25 + 175 - 50\sqrt{7} \cdot \cos\sphericalangle ABC$$

$$\cos\sphericalangle ABC = \frac{-\sqrt{7}}{14}$$

$$|\sphericalangle ABC| \approx 101°$$

Który wynik jest poprawny?


gdańskie
wydawnictwo
oświatowe
Trygonometryczny rowerzysta
Lekcje
z wykopem
Scenariusz lekcji dla nauczyciela

Trygonometryczny rowerzysta

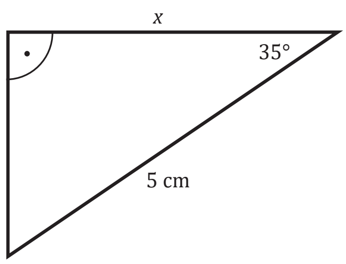
Opis: Proste zastosowania trygonometrii w trójkącie prostokątnym umieszczone w kontekście praktycznym.

Uwagi: Uczniowie powinni znać funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym i umieć z nich korzystać. Do niektórych obliczeń potrzebny jest kalkulator naukowy pozwalający ustalać dość dokładną miarę kąta na podstawie wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta. Zawartość lekcji można rozbudować o zadania z rozdziału *Zastosowania trygonometrii* z podręcznika GWO.

Przebieg lekcji:

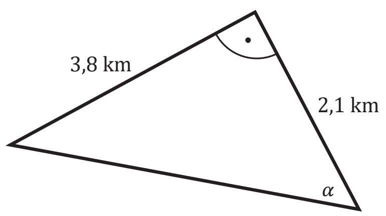
Przykład 1

1. Ćwiczenie: Oblicz długość boku x i miarę kąta α. Wyniki podaj z dokładnością do 1 centymetra i 1 stopnia.



Odpowiedź:

$x \approx 4$ cm

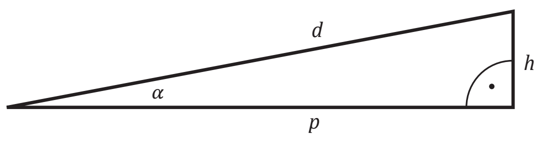


Odpowiedź:

$\alpha \approx 61°$

2. Zadanie: Na rysunku przedstawiono schemat podjazdu dla wózków inwalidzkich.

Literami oznaczono:
α – kąt nachylenia podjazdu,
d – długość podjazdu,
h – wysokość podjazdu,
p – długość podstawy podjazdu.



a) Jaka jest długość podjazdu o kącie nachylenia 4° i wysokości 50 cm? Podaj wynik z dokładnością do 1 cm.

b) Oblicz, z dokładnością do 1 stopnia, kąt nachylenia podjazdu o długości 6,05 m i podstawie długości 6 m.

c) Nachylenie podjazdu często podaje się jako stosunek wysokości podjazdu do długości jego podstawy $\left(\frac{h}{p}\right)$ wyrażony w procentach. Zgodnie z przepisami budowlanymi nachylenie podjazdu dla wózków inwalidzkich nie może przekroczyć 15%. Oblicz, z dokładnością do dziesiątej części stopnia, maksymalny dopuszczalny kąt nachylenia takiego podjazdu.

Odpowiedź:

a) $d = \frac{50}{\sin 4°} \approx 717$ [cm], b) $\cos\alpha = \frac{6}{6{,}05}$; $\alpha \approx 7°$ c) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}15$; $\alpha \approx 8{,}5°$

Uwaga. Należy zaakcentować, że nachylenie podjazdu wyrażone w procentach to faktycznie tangens kąta nachylenia tego podjazdu.

3. Nauczyciel: Znaki na poniższych zdjęciach pochodzą z różnych krajów. O czym informują? Jaką wielkość wyrażono w procentach?

Uwaga. Ponownie, tak jak w wypadku podjazdu, nachylenie drogi wyrażone w procentach to tangens kąta nachylenia drogi do poziomu.

Nachylenie drogi $= \frac{h}{d} \cdot 100\%$

4. Zadanie: Pod jakim kątem nachylona jest do poziomu ulica, przy której postawiono trzeci z powyższych znaków?

Odpowiedź:

$\mathrm{tg}\, \alpha = 0{,}07;\ \alpha \approx 4°$

Przykład 2

1. Nauczyciel: Pan Jacek każdego dnia dojeżdża do pracy rowerem (ta historia oparta jest na faktach). Fragment jego drogi do pracy prowadzi w dół stromej ulicy Małopolskiej (patrz mapka poniżej, 260 m to odległość mierzona w poziomie, p na rysunku z pkt. 2 w przykładzie 1).

2

Ulica Małopolska jest rzeczywiście stroma. Stoi przy niej taki znak drogowy.

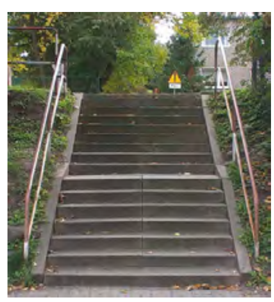
Zjeżdża się nią przyjemnie, ale droga powrotna tą ulicą jest mordęgą. Dlatego pan Jacek, aby jechać drogą o mniejszym nachyleniu, wraca inną trasą.

Zamiast z punktu **A** jechać pod górę ulicą Małopolską, jedzie ulicą Kurpiowską (która jest płaska) do punktu **B**.

Między punktami **B** i **C** nie ma ulicy, ale łączą je schody, złożone z 16 stopni, każdy o wysokości 15 cm.

Pan Jacek wpycha po schodach rower (nie jest to przyjemne, ale jest mniej męczące i trwa krócej niż wjazd ulicą Małopolską). Dalszą drogę (do ulicy Łowickiej 4) pokonuje już rowerem wzdłuż niebieskiej linii (wzdłuż ulicy Wielkopolskiej, odległość 230 m jest mierzona w poziomie).

Dla dociekliwych: punkty „Małopolska 22” i „Łowicka 4” leżą na tej samej wysokości, fragment ulicy, który je łączy, jest płaski.



2. Zadanie: Jaka jest różnica między miarami kątów nachylenia ulicy Małopolskiej i niebieskiego fragmentu drogi powrotnej pana Jacka? Ile stopni nachylenia pan Jacek „zyskuje", wpychając rower po schodach?

Odpowiedź:

Kąt (α) nachylenia ulicy Małopolskiej:

$\text{tg}\,\alpha = 0{,}14;\ \alpha \approx 7{,}97°$

Różnica wysokości (H) między początkiem a końcem zjazdu ulicą Małopolską (czyli różnica wysokości między Małopolską 22 a Kurpiowską 38):

$\frac{H}{260} = \text{tg}\,\alpha = 0{,}14$, więc $H = 0{,}14 \cdot 260 = 36{,}4$ [m]

Wysokość (s) schodów:

$s = 16 \cdot 0{,}15 = 2{,}4$ [m]

Różnica wysokości (h) między początkiem a końcem powrotu niebieską trasą (czyli różnica wysokości między Łowicką 4 a Źródlaną 1:

$h = H - s = 36{,}4 - 2{,}4 = 34$ [m]

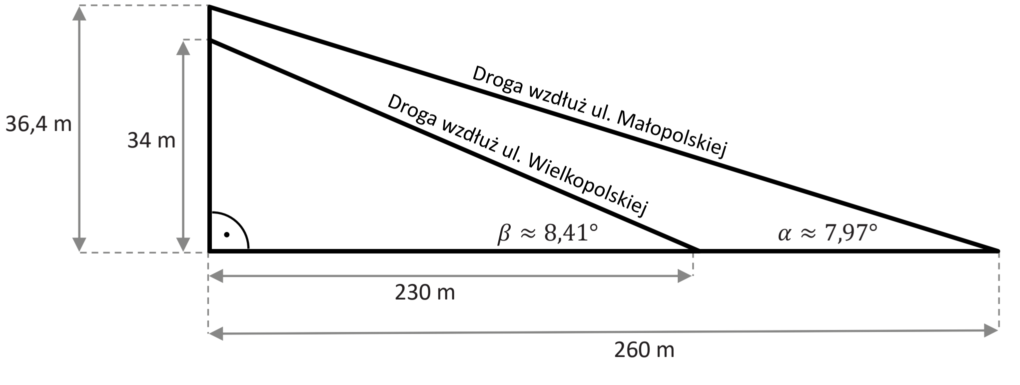
Kąt (β) nachylenia niebieskiej trasy powrotnej:

$\text{tg}\,\beta = \frac{34}{230}$, więc $\beta \approx 8{,}41°$

Różnica miar kątów:

$\beta - \alpha \approx 8{,}41° - 7{,}97° = 0{,}44°$

Uwaga: Różnica między miarami kątów jest niewielka, ale – co zaskakujące (i powinno być zauważone przez uczniów) – kąt nachylenia drogi powrotnej jest większy (a nie mniejszy, jak chciał pan Jacek!) od kąta nachylenia ulicy Małopolskiej! Warto by uczniowie zastanowili się, dlaczego tak jest (pan Jacek, wchodząc po schodach, wprawdzie zmniejszył różnicę wysokości, ale przez wybór niebieskiej drogi skrócił też pokonywaną trasę). Poniższy rysunek nie zachowuje proporcji, ale może pomóc zrozumieć tę sytuację.



Podsumowanie

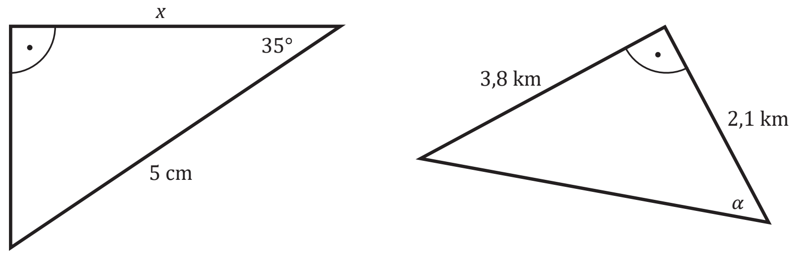
Nauczyciel: Pan Jacek tak bardzo był przekonany o tym, że wchodząc po schodach zmniejsza nachylenie pozostałego fragmentu drogi do domu, że nie zauważył, że faktycznie jedzie trasą bardziej stromą. Intuicja jest bezcennym narzędziem podpowiadającym człowiekowi rozwiązania problemów, jednak bywa, że nie wskazuje rozwiązania najlepszego. Dobrą praktyką jest weryfikowanie intuicyjnych odpowiedzi za pomocą obiektywnych i niezawodnych narzędzi, wśród których niepodzielnie króluje matematyka.


gdańskie
wydawnictwo
oświatowe
Trygonometryczny rowerzysta
Lekcje
z wykopem
Karta pracy dla ucznia

Trygonometryczny rowerzysta

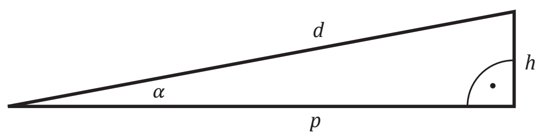
Przykład 1

Krok 1: Oblicz długość boku x i miarę kąta α. Wyniki podaj z dokładnością do 1 centymetra i 1 stopnia.



Krok 2: Na rysunku przedstawiono schemat podjazdu dla wózków inwalidzkich.

Literami oznaczono:
α – kąt nachylenia podjazdu,
d – długość podjazdu,
h – wysokość podjazdu,
p – długość podstawy podjazdu.

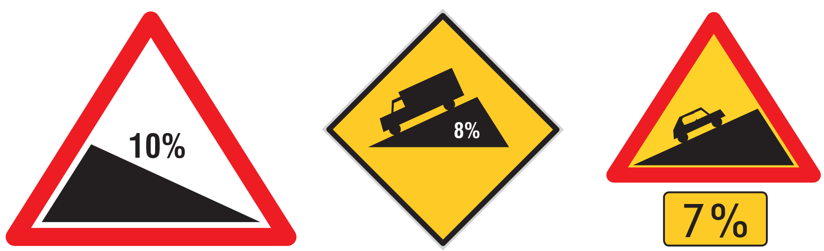


a) Jaka jest długość podjazdu o kącie nachylenia 4° i wysokości 50 cm? Podaj wynik z dokładnością do 1 cm.

b) Oblicz, z dokładnością do 1 stopnia, kąt nachylenia podjazdu o długości 6,05 m i podstawie długości 6 m.

c) Nachylenie podjazdu często podaje się jako stosunek wysokości podjazdu do długości jego podstawy $\left(\frac{h}{p}\right)$ wyrażony w procentach. Zgodnie z przepisami budowlanymi nachylenie podjazdu dla wózków inwalidzkich nie może przekroczyć 15%. Oblicz, z dokładnością do dziesiątej części stopnia, maksymalny dopuszczalny kąt nachylenia takiego podjazdu.

Krok 3: Znaki na poniższych zdjęciach pochodzą z różnych krajów. O czym informują?
Jaką wielkość wyrażono w procentach?



Krok 4 : Pod jakim kątem nachylona jest do poziomu ulica, przy której postawiono trzeci z powyższych znaków?

Przykład 2

Krok 1: Pan Jacek każdego dnia dojeżdża do pracy rowerem (ta historia oparta jest na faktach). Fragment jego drogi do pracy prowadzi w dół stromej ulicy Małopolskiej (patrz mapka poniżej, 260 m to odległość mierzona w poziomie, p na rysunku z Kroku 2.).

Ulica Małopolska jest rzeczywiście stroma. Stoi przy niej taki znak drogowy.

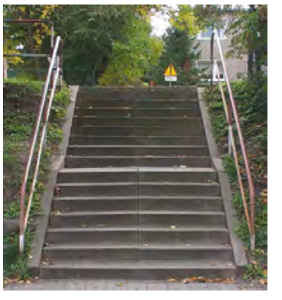
Zjeżdża się nią przyjemnie, ale droga powrotna tą ulicą jest mordęgą. Dlatego pan Jacek, aby jechać drogą o mniejszym nachyleniu, wraca inną trasą.

Zamiast z punktu **A** jechać pod górę ulicą Małopolską, jedzie ulicą Kurpiowską (która jest płaska) do punktu **B**.

Między punktami **B** i **C** nie ma ulicy, ale łączą je schody, złożone z 16 stopni, każdy o wysokości 15 cm.

Pan Jacek wpycha po schodach rower (nie jest to przyjemne, ale jest mniej męczące i trwa krócej niż wjazd ulicą Małopolską). Dalszą drogę (do ulicy Łowickiej 4) pokonuje już rowerem wzdłuż niebieskiej linii (wzdłuż ulicy Wielkopolskiej, odległość 230 m jest mierzona w poziomie).

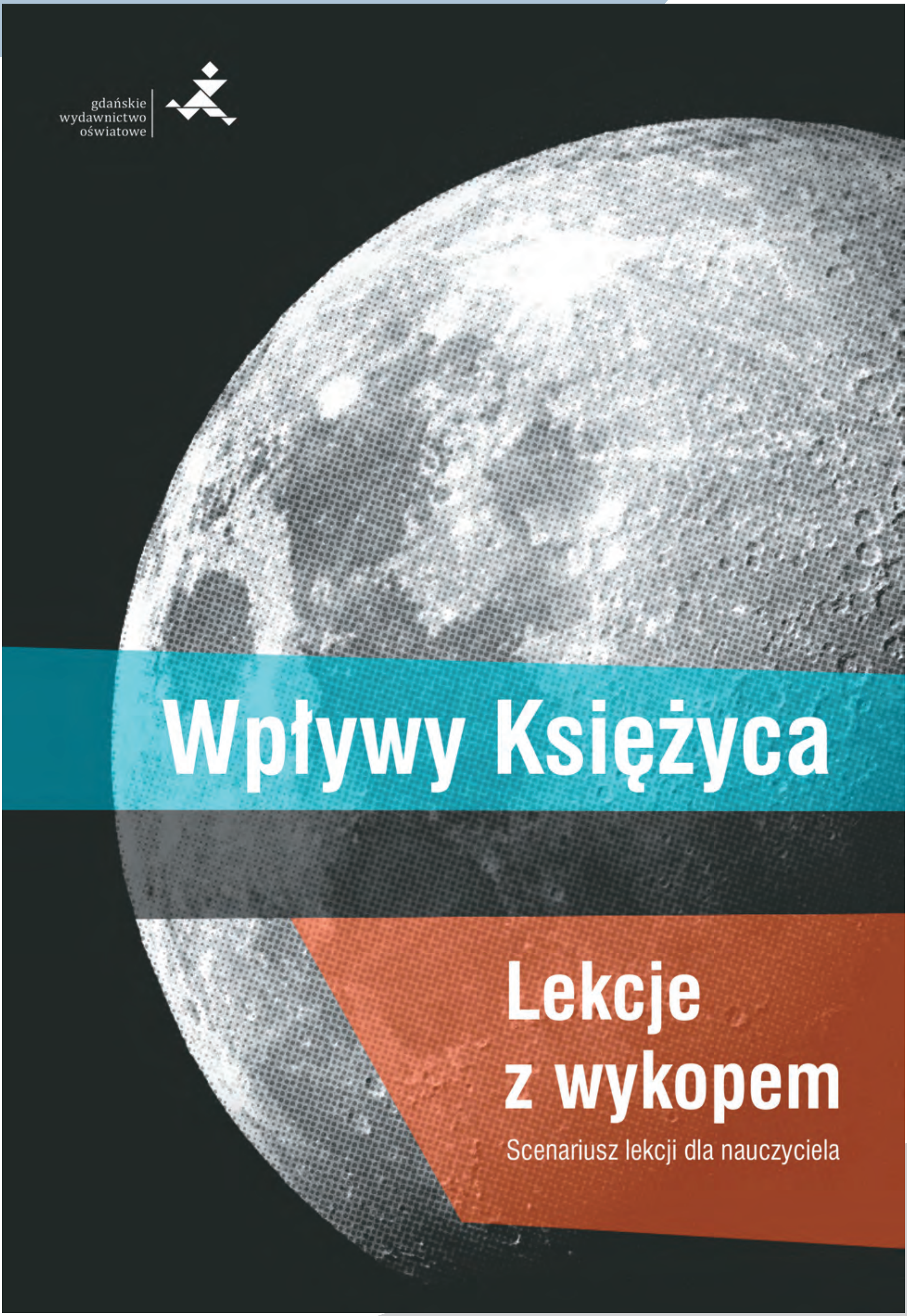
Dla dociekliwych: punkty „Małopolska 22” i „Łowicka 4” leżą na tej samej wysokości, fragment ulicy, który je łączy, jest płaski.



Krok 2: Jaka jest różnica między miarami kątów nachylenia ulicy Małopolskiej i niebieskiego fragmentu drogi powrotnej pana Jacka? Ile stopni nachylenia pan Jacek „zyskuje”, wpychając rower po schodach?

Podsumowanie

Pan Jacek tak bardzo był przekonany o tym, że wchodząc po schodach zmniejsza nachylenie pozostałego fragmentu drogi do domu, że nie zauważył, że faktycznie jedzie trasą bardziej stromą. Intuicja jest bezcennym narzędziem podpowiadającym człowiekowi rozwiązania problemów, jednak bywa, że nie wskazuje rozwiązania najlepszego. Dobrą praktyką jest weryfikowanie intuicyjnych odpowiedzi za pomocą obiektywnych i niezawodnych narzędzi, wśród których niepodzielnie króluje matematyka.


gdańskie
wydawnictwo
oświatowe
Wpływy Księżyca
Lekcje
z wykopem
Scenariusz lekcji dla nauczyciela

Wpływy Księżyca

Opis: Tę lekcję można przeprowadzić w czasie omawiania przekształceń funkcji trygonometrycznych.

Przebieg lekcji:

Przed przejściem do głównego tematu lekcji proponujemy wykonać z uczniami następujące ćwiczenia.

1. Ćwiczenie: Ustal wartość największą, najmniejszą oraz amplitudę każdej z podanych funkcji trygonometrycznych. Wyznacz także jej okres.

a) $f(x) = 1 + \sin 2x$

b) $f(x) = 4 \sin x - 2$

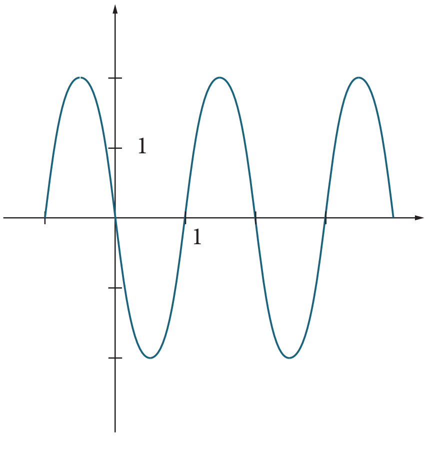
c) $f(x) = -4 - 3 \cos (4x - 2)$

d) $f(x) = 2 \cos 4(x - 2) + 1$

Uwaga: Amplituda funkcji $y = a \sin k(x + p) + q$ wynosi $|a|$.

2. Ćwiczenie: Napisz wzór funkcji postaci $f(x) = a \sin kx + p,$ której wartość maksymalna wynosi 10, minimalna jest równa –2 , zaś okres *T* wynosi $T = \frac{\pi}{3}$.

3. Ćwiczenie: Napisz równanie funkcji, której wykres przedstawiono poniżej.



Drugą część lekcji można rozpocząć od rozmowy z uczniami na temat odpływów i przypływów morza. Przyczyny pływów z reguły uczniowie znają – odpowiedzialny za nie jest Księżyc. Nie zawsze jednak wiedzą, jak często pojawia się tzw. „wysoka woda” i że Słońce oraz grawitacja Ziemi również mają wpływ na to zjawisko. Ta lekcja ma poszerzyć ich wiedzę na ten temat, ale także dać możliwość pokazania zastosowań matematyki w życiu codziennym.

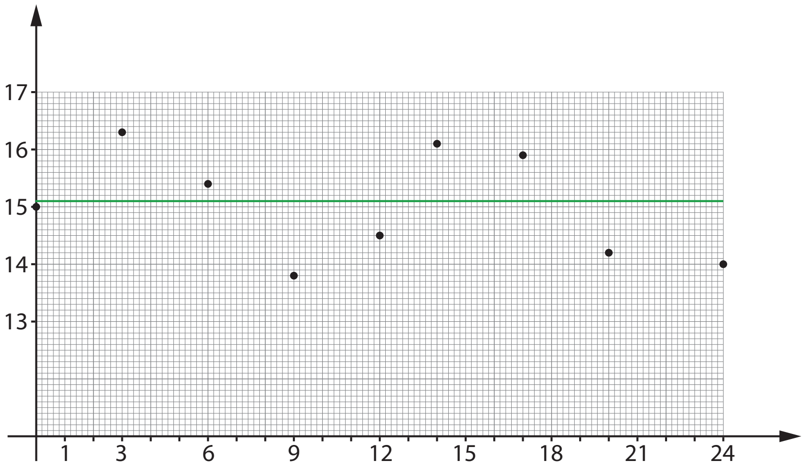
4. Nauczyciel: Omawiając funkcje, staramy się przedstawić takie zależności, które opisują zjawiska przyrody. Przy okazji funkcji liniowej możemy mówić o rozszerzalności cieplnej, czy o ruchu prostoliniowym, zaś gdy omawiamy funkcje kwadratowe – o ruchu jednostajnie przyspieszonym. Funkcje trygonometryczne pojawią się, gdy opisywać będziemy ruch wahadła, drgania sprężyny czy też pływy oceanów.

Wiadomości na temat przypływów i odpływów warto poprzeć fotografiami:

W poniższej tabeli podano wyniki pomiarów głębokości morza na końcu pomostu w pewnej miejscowości. Pomiary zostały zebrane w ciągu 1,5 doby (wykonywane były co 3 godziny począwszy od północy).

t (h)	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
D (m)	15,05	16,34	15,36	13,83	14,45	16,12	15,91	14,19	13,98	15,65	16,27	14,74

Przedstawmy zebrane dane w prostokątnym układzie współrzędnych. Można to zrobić ręcznie na papierze milimetrowym lub przy użyciu programów graficznych.



Otrzymany wykres sugeruje, że głębokość zmienia się okresowo w zależności od czasu. Mamy zatem do czynienia z funkcją trygonometryczną. Będzie miała ona postać $d = a \sin k \cdot t + q$.

Spróbujmy ustalić wartości współczynników a, k i q występujących we wzorze funkcji.

Zauważmy, że najniższy poziom wody wynosił 13,83, zaś najwyższy – 16,34.

Zatem $q = \frac{13{,}83 + 16{,}34}{2} \approx 15{,}09$

Amplitudę możemy przybliżyć następująco a = 16,34 – 15,09 = 1,25 m.

Narysujmy prostą o równaniu d = 15,09.

Możemy uznać, że przesunięcie na osi OX prawie nie istnieje (dla $t = 0$ mamy $q = 15{,}05$), a przesunięcie na osi OY zostało wyznaczone i wynosi 15,09.

Spróbujemy odczytać okres tej funkcji z wykresu. To około 12,7 h.

Zatem $12{,}7 = \frac{2\pi}{k}$, więc $k = \frac{2\pi}{12{,}7} \approx 0{,}495.$

Otrzymujemy wzór funkcji modelującej: $d = 1{,}25 \sin 0{,}495t + 15{,}09$.

Jeżeli mamy możliwość wykorzystania kalkulatora graficznego lub programu rysującego wykresy, możemy pokazać, jak trafnie odkryliśmy wzór funkcji modelującej dane.

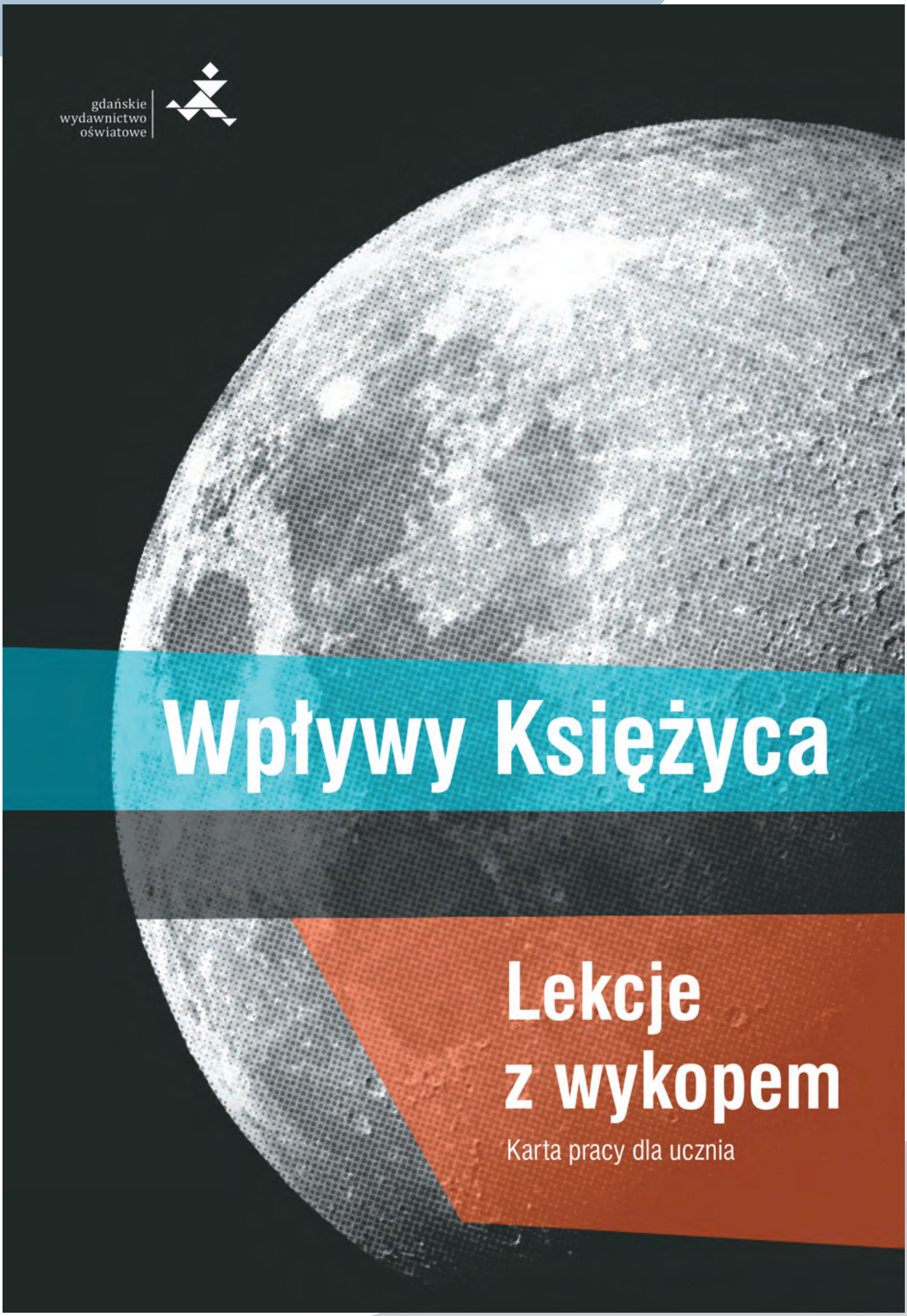
Możemy wykorzystać opcję znajdowania krzywej regresji czy krzywej trendu, aby pokazać, jak dokładne jest nasze przybliżenie.

Zauważmy, że wysoka woda zdarza się dwa razy w ciągu doby. Amplituda pływu w naszym wypadku wynosi 1,25 m, różni się ona jednak w różnych miejscach. Na jej wartość mają wpływ zarówno kształt linii brzegowej, jak i dna.

Podsumowanie:

Amplituda fali przypływowej osiąga największą wartość w cieśninach i zatokach. W zatoce Fundy w Kanadzie wysokość fali dochodzić może nawet do 21 m. W internecie łatwo można znaleźć filmy ilustrujące to oszałamiające zjawisko, np: https://www.youtube.com/watch?v=3RdkXs8BibE

W morzach wewnętrznych i w oddalonych od oceanów cieśninach przypływy są bardzo słabe. W Polsce nad Bałtykiem wynoszą zaledwie kilka centymetrów.


gdańskie
wydawnictwo
oświatowe
Wpływy Księżyca
Lekcje
z wykopem
Karta pracy dla ucznia

Wpływy Księżyca

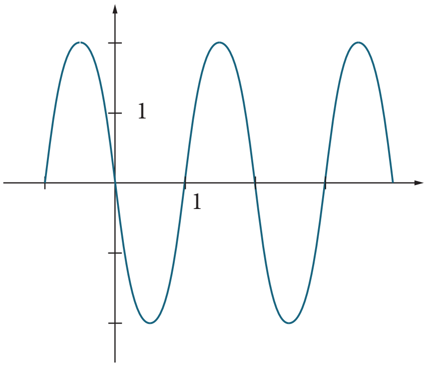
Krok 1: Ustal wartość największą, najmniejszą oraz amplitudę każdej z podanych funkcji trygonometrycznych Wyznacz także jej okres.

a) $f(x) = 1 + \sin 2x$
b) $f(x) = 4 \sin x - 2$
c) $f(x) = -4 - 3 \cos (4x - 2)$
d) $f(x) = 2 \cos 4(x - 2) + 1$

Uwaga: Amplituda funkcji $y = a \sin k(x + p) + q$ wynosi $|a|$.

Krok 2: Napisz wzór funkcji postaci $f(x) = a \sin kx + p,$ której wartość maksymalna wynosi 10, minimalna jest równa –2 , zaś okres *T* wynosi $T = \frac{\pi}{3}$.

Krok 3: Napisz równanie funkcji, której wykres przedstawiono poniżej.



Krok 4: W poniższej tabeli podano wyniki pomiarów głębokości morza na końcu pomostu w pewnej miejscowości. Pomiary zostały zebrane w ciągu 1,5 doby (wykonywane były co 3 godziny począwszy od północy).

t (h)	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
D (m)	15,05	16,34	15,36	13,83	14,45	16,12	15,91	14,19	13,98	15,65	16,27	14,74

Przedstaw zebrane dane w prostokątnym układzie współrzędnych. Możesz to zrobić ręcznie na papierze milimetrowym lub przy użyciu programów graficznych.

Otrzymany wykres będzie sugerował, że głębokość zmienia się okresowo w zależności od czasu. Mamy zatem do czynienia z funkcją trygonometryczną. Będzie miała ona postać $d = a \sin k \cdot t + q$.

Spróbuj ustalić wartości współczynników a, k i q występujących we wzorze funkcji.

Podsumowanie:

Amplituda fali przypływowej osiąga największą wartość w cieśninach i zatokach. W zatoce Fundy w Kanadzie wysokość fali dochodzić może nawet do 21 m. W internecie łatwo można znaleźć filmy ilustrujące to oszałamiające zjawisko, np: https://www.youtube.com/watch?v=3RdkXs8BibE

W morzach wewnętrznych i w oddalonych od oceanów cieśninach przypływy są bardzo słabe. W Polsce nad Bałtykiem wynoszą zaledwie kilka centymetrów.


gdańskie
wydawnictwo
oświatowe
Tajemny wielokąt
Lekcje
z wykopem
Scenariusz lekcji dla nauczyciela

Tajemny wielokąt

Opis: W trakcie realizacji zagadnień z trygonometrii uczniowie wyznaczają dokładne wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30°, 45° oraz 60°. Kąty te uczniowie znajdują w kwadracie czy też w trójkącie równobocznym. Czy można obliczyć dokładnie wartości funkcji trygonometrycznych innych kątów?

Uwagi: Uczeń zna zależności trygonometryczne w trójkącie prostokątnym, rozpoznaje trójkąty podobne, zna ich własności, potrafi rozwiazywać równania kwadratowe z parametrem.

Przebieg lekcji:

1. Nauczyciel: Niektóre tablice matematyczne podają wartości funkcji trygonometrycznych kąta 18°.

–	15°	18°	22, 5°	36°	54°	67, 5°	72°	75°
sin α	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
cos α	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
tg α	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$2+\sqrt{3}$

Zastanowimy się wspólnie, w jaki sposób zostały one wyznaczone.

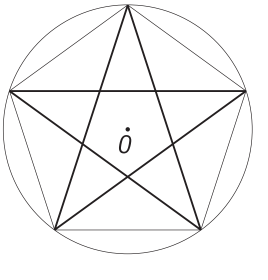
Nauczyciel: Pentagram (gwiazda pitagorejska) to figura geometryczna nazywana też wielokątem gwiaździstym foremnym. W wielu kulturach pentagram uważany jest za symbol magiczny.

Oto, co mówi Wikipedia (https://pl.wikipedia.org/wiki/Pentagram):

> *Pentagram był symbolem znanym już w czasach neolitu. Pentagram był znany jako Gwiazda Isztar, a później jako Gwiazda Izydy. Mistycy pitagorejscy widzieli w nim symbol doskonałości, kojarzyli go z życiem i zdrowiem. W starożytności przekonanie o właściwościach ochronnych pentagramu było tak silne, że Babilończycy często rysowali go na pojemnikach z żywnością, co miało zapobiegać jej gniciu. Dla pierwszych chrześcijan pentagram odzwierciedlał pięć ran Jezusa, ze względu na 5 wierzchołków. Od XIV wieku uważany za symbol szatana, ze względu na podobieństwo do głowy kozła (odwrócony dwoma wierzchołkami do góry). W XIX wieku Eliphas Lęvi podzielił pentagramy na „dobrą stronę" i „złą stronę". Za „dobrą" uznał ten odwrócony jednym wierzchołkiem do góry, za „złą" odwrócony – zwrócony dwoma wierzchołkami do góry. Pentagram zwrócony jednym wierzchołkiem do góry zwany jest Pentagramem Białym, jest on odzwierciedleniem sacrum – siły boskiej. Może również odzwierciedlać pięć zmysłów człowieka, pięć żywiołów: ziemię, wodę, wiatr, ogień i światło, oraz pięć światów: fizyczny, eteryczny, astralny, mentalny i duchowy, ukazując wyższość umysłu człowieka nad wszelkimi innymi żywiołami i zmysłami. Pentagram zwrócony jednym wierzchołkiem ku dołowi zwany jest Pentagramem Odwróconym, Czarnym lub Pentagramem Baphometa. Pentagram Baphometa przedstawia profanum – człowieczeństwo, odzwierciedla on wyższość żądz i emocji nad rozumem, jest powszechnie uważany za znak satanistyczny, chociaż często mylony z Pentagramem Białym. Biały Pentagram w okręgu (inaczej pentakl) uważany jest za amulet chroniący przed zgubnym wpływem magii oraz klątwami. Można go zauważyć na różnych talizmanach i amuletach oraz odnaleźć w wielu budowlach sakralnych itp. Pentakl jest między innymi symbolem religii Wicca i innych tradycji pogańskich.*

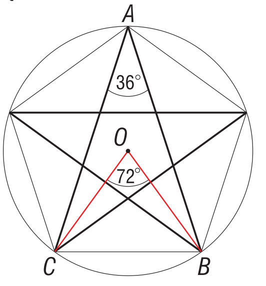
Uwaga. Uczniowie mogą przygotować prezentację na temat znaczenia pentagramu.

Nauczyciel: Rysunek przedstawia pięciokąt i pentagram foremny, oba wpisane w koło o środku O.

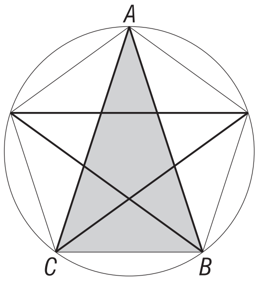


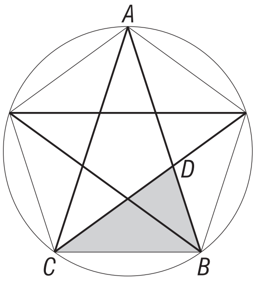
1

Nietrudno stwierdzić, że kąt *CAB* ma miarę 36°.



Zauważmy, że trójkąty *CBA* i *BDC* są trójkątami podobnymi (na podstawie cechy kkk).





Oto jedna z propozycji ustalenia miar ich kątów:

$|\sphericalangle CAB| = 36^\circ$

$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABC| = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$

Miary kątów trójkąta *CBA*: 36°, 72°, 72°

$|\sphericalangle ACB| = 72^\circ$

$|\sphericalangle ACD| = 36^\circ$

$|\sphericalangle DCB| = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$

$|\sphericalangle CAD| = 36^\circ$

$|\sphericalangle CBD| = 72^\circ$

$|\sphericalangle CDB| = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$

Miary kątów trójkąta *BDC*: 36°, 72°, 72°

Z podobieństwa trójkątów *CBA* i *BDC* otrzymujemy: $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|BC|}{|BD|}$.

Niech $|CA| = x$, $|CB| = a$, wtedy $|DB| = x - a$.

A więc:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a}, \quad a > 0, \quad x > 0$$

$$x^2 - ax - a^2 = 0$$

$$\Delta = a^2 + 4a^2 = 5a^2$$

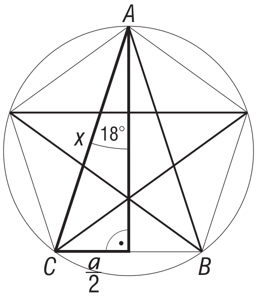
$$\sqrt{\Delta} = a\sqrt{5}$$

$$x = \frac{a - a\sqrt{5}}{2} = \underbrace{\frac{a(1-\sqrt{5})}{2} < 0}_{\text{nie spełnia założeń}} \quad \text{lub} \quad x = \underbrace{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2} > 0}_{\text{spełnia założenia}}$$

Korzystając teraz ze stosunków trygonometrycznych w trójkątach prostokątnych bądź z twierdzenia cosinusów, można wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta 18° (lub jego wielokrotności).

2

Rozważmy na przykład trójkąt *CAA'*:



$$\sin 18° = \frac{\frac{a}{2}}{x}$$

$$\sin 18° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{1-5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Porównajmy ten wynik z liczbą podaną w tabeli.

Ćwiczenie: Wyznacz $\cos 18°$ i $\mathrm{tg}\, 18°$.

Podsumowanie

Nauczyciel: Warto zwrócić uwagę na to, jak wiele znajdujemy matematyki wokół nas. Być może nigdy nie podejrzewaliśmy, że gwiazda pięcioramienna kryje tyle tajemnic.


gdańskie
wydawnictwo
oświatowe
Tajemny wielokąt
Lekcje
z wykopem
Karta pracy dla ucznia

Tajemny wielokąt

Krok 1: Niektóre tablice matematyczne podają wartości funkcji trygonometrycznych kąta 18°.

–	15°	18°	22,5°	36°	54°	67,5°	72°	75°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$2+\sqrt{3}$

Zastanów się, w jaki sposób zostały one wyznaczone.

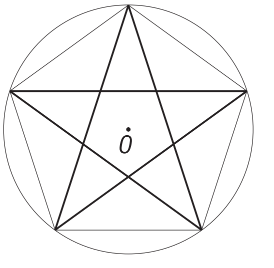
Krok 2: Pentagram (gwiazda pitagorejska) to figura geometryczna nazywana też wielokątem gwiaździstym foremnym. W wielu kulturach pentagram uważany jest za symbol magiczny.

Oto, co mówi Wikipedia (https://pl.wikipedia.org/wiki/Pentagram):

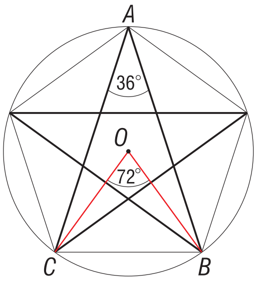
> *Pentagram był symbolem znanym już w czasach neolitu. Pentagram był znany jako Gwiazda Isztar, a później jako Gwiazda Izydy. Mistycy pitagorejscy widzieli w nim symbol doskonałości, kojarzyli go z życiem i zdrowiem. W starożytności przekonanie o właściwościach ochronnych pentagramu było tak silne, że Babilończycy często rysowali go na pojemnikach z żywnością, co miało zapobiegać jej gniciu. Dla pierwszych chrześcijan pentagram odzwierciedlał pięć ran Jezusa, ze względu na 5 wierzchołków. Od XIV wieku uważany za symbol szatana, ze względu na podobieństwo do głowy kozła (odwrócony dwoma wierzchołkami do góry). W XIX wieku Eliphas Lęvi podzielił pentagramy na „dobrą stronę" i „złą stronę". Za „dobrą" uznał ten odwrócony jednym wierzchołkiem do góry, za „złą" odwrócony – zwrócony dwoma wierzchołkami do góry. Pentagram zwrócony jednym wierzchołkiem do góry zwany jest Pentagramem Białym, jest on odzwierciedleniem sacrum – siły boskiej. Może również odzwierciedlać pięć zmysłów człowieka, pięć żywiołów: ziemię, wodę, wiatr, ogień i światło, oraz pięć światów: fizyczny, eteryczny, astralny, mentalny i duchowy, ukazując wyższość umysłu człowieka nad wszelkimi innymi żywiołami i zmysłami. Pentagram zwrócony jednym wierzchołkiem ku dołowi zwany jest Pentagramem Odwróconym, Czarnym lub Pentagramem Baphometa. Pentagram Baphometa przedstawia profanum – człowieczeństwo, odzwierciedla on wyższość żądz i emocji nad rozumem, jest powszechnie uważany za znak satanistyczny, chociaż często mylony z Pentagramem Białym. Biały Pentagram w okręgu (inaczej pentakl) uważany jest za amulet chroniący przed zgubnym wpływem magii oraz klątwami. Można go zauważyć na różnych talizmanach i amuletach oraz odnaleźć w wielu budowlach sakralnych itp. Pentakl jest między innymi symbolem religii Wicca i innych tradycji pogańskich.*

Ćwiczenie 1: Przygotuj prezentację na temat znaczenia pentagramu.

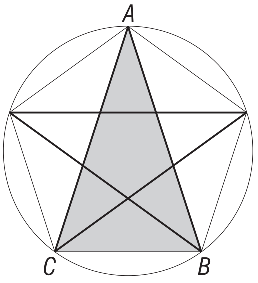
Krok 3: Rysunek przedstawia pięciokąt i pentagram foremny, oba wpisane w koło o środku O.

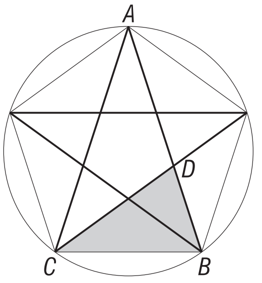


Nietrudno stwierdzić, że kąt CAB ma miarę 36°.



Zauważ, że trójkąty *CBA* i *BDC* są trójkątami podobnymi (na podstawie cechy kkk).





Oto jedna z propozycji ustalenia miar ich kątów:

$|\sphericalangle CAB| = 36^\circ$

$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABC| = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$

Miary kątów trójkąta *CBA*: 36°, 72°, 72°

$|\sphericalangle ACB| = 72^\circ$, $|\sphericalangle ACD| = 36^\circ$

$|\sphericalangle DCB| = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$

$|\sphericalangle CAD| = 36^\circ$, $|\sphericalangle CBD| = 72^\circ$

$|\sphericalangle CDB| = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$

Miary kątów trójkąta *BDC*: 36°, 72°, 72°

Z podobieństwa trójkątów *CBA* i *BDC* otrzymujesz: $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|BC|}{|BD|}$. Niech $|CA| = x$, $|CB| = a$, wtedy $|DB| = x - a$. A więc:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a}, \quad a > 0, \quad x > 0$$

$$x^2 - ax - a^2 = 0$$

$$\Delta = a^2 + 4a^2 = 5a^2$$

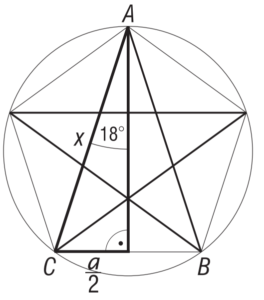
$$\sqrt{\Delta} = a\sqrt{5}$$

$$x = \frac{a - a\sqrt{5}}{2} = \underbrace{\frac{a(1-\sqrt{5})}{2} < 0}_{\text{nie spełnia założeń}} \quad \text{lub} \quad x = \underbrace{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2} > 0}_{\text{spełnia założenia}}$$

Korzystając teraz ze stosunków trygonometrycznych w trójkątach prostokątnych bądź z twierdzenia cosinusów, można wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta 18° (lub jego wielokrotności).

Rozważ na przykład trójkąt *CAA'*:

$$\sin 18^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{x} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{1-5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$



Porównaj ten wynik z liczbą podaną w tabeli.

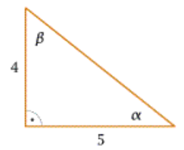
Ćwiczenie 2: Wyznacz $\cos 18^\circ$ i $\operatorname{tg} 18^\circ$.

Podsumowanie

Warto zwrócić uwagę na to, jak wiele znajdujemy matematyki wokół nas. Być może nigdy nie podejrzewaliśmy, że gwiazda pięcioramienna kryje tyle tajemnic.

Zadanie 1

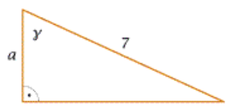
Oblicz tangensy kątów α i β .



- [ ] $tg\alpha=\frac{5}{\sqrt{41}}$, $tg\beta=\frac{4}{\sqrt{41}}$
- [ ] $tg\alpha=\frac{5}{4}$, $tg\beta=\frac{4}{5}$
- [ ] $tg\alpha=\frac{4}{\sqrt{41}}$, $tg\beta=\frac{5}{\sqrt{41}}$
- [ ] $tg\alpha=\frac{4}{5}$, $tg\beta=\frac{5}{4}$

Zadanie 2

Oblicz długość odcinka a, wiedząc, że $\cos\gamma=\frac{5}{14}$.



- [ ] $a=5$
- [ ] $a=2$
- [ ] $a=19{,}6$
- [ ] $a=2{,}5$

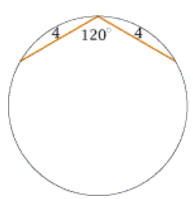
Zadanie 3

Wyrażenie $\frac{tg^2 60^\circ+\sin 150^\circ\cdot\cos 60^\circ}{1+4\cdot\cos 135^\circ}$ ma wartość:

- [ ] $-\frac{3{,}25(1-\sqrt{2})}{7}$
- [ ] $\frac{7+\sqrt{2}}{7}$
- [ ] $\frac{7+2\sqrt{2}}{7}$
- [ ] $-\frac{3{,}25(1+2\sqrt{2})}{7}$

Zadanie 4

Długość cięciwy, na której oparty jest zaznaczony na rysunku kąt, wynosi:



- [ ] 2
- [ ] 4
- [ ] $2\sqrt{3}$
- [ ] $4\sqrt{3}$

Zadanie 5

Równanie prostej, która jest nachylona do osi x pod kątem 135° i przechodzi przez punkt $(1,3)$, to:

- [ ] $y=x+2$
- [ ] $y=-x+4$
- [ ] $y=3x$
- [ ] $y=2x+1$

Zadanie 6

Boki równoległoboku mają 3 cm i 6 cm, a jego kąt ostry ma $42°$. Pole tego równoległoboku, w przybliżeniu do całości, jest równe:

sin 42°	0,6691
cos 42°	0,7431
tg 42°	0,9004

- [ ] 12 cm^2
- [ ] 6 cm^2
- [ ] 16 cm^2
- [ ] 13 cm^2

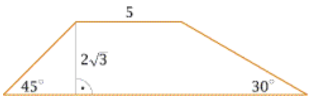
Zadanie 7

Jeżeli α jest kątem ostrym i $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, to:

- [ ] $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$
- [ ] $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- [ ] $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- [ ] $tg\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 8

Pole trapezu przedstawionego na poniższym rysunku wynosi:



- [ ] $10\sqrt{3}+9$
- [ ] $12\sqrt{3}+18$
- [ ] $16\sqrt{3}+12$
- [ ] $16\sqrt{3}+6$

Zadanie 9

Przekątne równoległoboku przecinają się pod kątem 60°, a ich długości wynoszą 4 i 6. Obwód tego równoległoboku jest równy:

- [ ] $2(\sqrt{13-\sqrt{3}}+\sqrt{13+\sqrt{3}})$
- [ ] $\sqrt{14}+\sqrt{38}$
- [ ] $\sqrt{7}+\sqrt{19}$
- [ ] $2\sqrt{7}+2\sqrt{19}$

Zadanie 10

Samolot startuje pod kątem $30°$ do poziomu. Po jakim czasie wzniesie się na wysokość 500 m, jeśli jego średnia prędkość wynosi 300 $\frac{km}{h}$?

- [ ] po 6 sekundach
- [ ] po 6 minutach
- [ ] po 12 sekundach
- [ ] po 12 minutach

SCHODY

Przepisy budowlane dość ściśle określają, jak powinny być budowane schody.

Najistotniejszy jest przepis, który opisuje związek między wysokością stopnia schodów a jego szerokością. Reguła dobrych schodów (taką nazwę nosi ten związek) mówi, że wymiary stopni schodów powinny spełniać warunek:

$$60 \leqslant 2w + s \leqslant 65$$

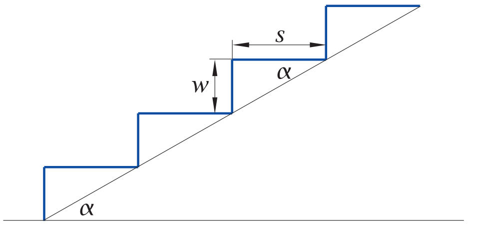
gdzie w to wysokość stopnia (w cm), s — szerokość stopnia (w cm).

W tabeli podano maksymalne, zgodne z przepisami budowlanymi wysokości stopni, w zależności od przeznaczenia budynku, w którym się znajdują.

Przeznaczenie budynków	Maksymalna wysokość stopni (cm)
Budynki jednorodzinne oraz mieszkania dwupoziomowe	19 cm
Budynki mieszkalne wielorodzinne, budynki zamieszkania zbiorowego oraz użyteczności publicznej, a także budynki produkcyjne oraz magazynowo-składowe	17,5 cm
Przedszkola i żłobki oraz budynki zakładów opieki zdrowotnej	15 cm
Budynki inwentarskie oraz schody do piwnic i poddaszy nieużytkowych we wszelkich budynkach	20 cm

Gdy znamy wysokość i szerokość stopnia schodów, możemy łatwo obliczyć kąt nachylenia tych schodów (zob. rysunek). Wystarczy zauważyć, że:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w}{s}$$



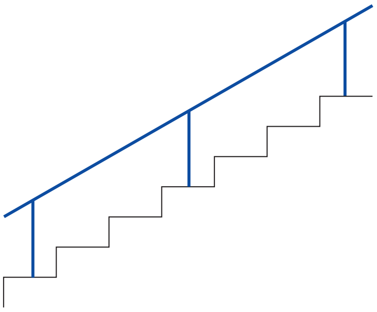
α – kąt nachylenia schodów
s – szerokość stopnia
w – wysokość stopnia

1. Podaj przykłady wymiarów stopni schodów (wysokość i szerokość), które są zgodne z regułą dobrych schodów.

2. Zmierz długość i szerokość stopni różnych schodów (w twoim domu, w szkole lub w innych budynkach, które znajdują się w okolicy twojego miejsca zamieszkania). Sprawdź, czy spełniona jest dla nich reguła dobrych schodów. Oblicz, pod jakimi kątami nachylone są te schody.

3. Pewne schody mają 7 stopni, z których każdy ma wysokość 16 cm i szerokość 28 cm. Jaką długość ma poręcz tych schodów (zob. rysunek)?

Wskazówka. Oblicz sumę szerokości wszystkich stopni i skorzystaj z tego, że poręcz nachylona jest do poziomu pod takim samym kątem jak schody.



4. Jaki może być największy kąt nachylenia prawidłowo zbudowanych schodów, znajdujących się w budynkach użyteczności publicznej?

5. Kąt nachylenia pewnych schodów prowadzących do piwnicy ma miarę 43°. Szerokość stopni wynosi 21 cm. Czy te schody są zbudowane zgodnie z przepisami budowlanymi?

Co dalej?

Zaprojektuj schody, które sięgać będą do wysokości 2 m. W swoim projekcie podaj przede wszystkim, jakie mają być wymiary stopni oraz ile ma być stopni. Oblicz także, pod jakim kątem nachylone będą twoje schody i jaka będzie długość poręczy.

Multipodręczniki dla klas 1 i 2
– zakresy podstawowy i rozszerzony

Dopasowane do umiejętności uczniów po 8-klasowej szkole podstawowej? Kształcą umiejętność budowania modeli? Dawkują wiadomości w łatwo przyswajalnych porcjach?

Sprawdź.

Twój kod dostępu:

MASZ-NOWY-PODR

1. Wejdź na **www.wpiszkod.gwo.pl**.
2. Zaloguj się lub najpierw zarejestruj, jeśli nigdy wcześniej nie rejestrowałaś/eś się na www.gwo.pl.
3. Wpisz kod. Wpisujesz go tylko raz, potem przeglądasz podręczniki, logując się na www.gwo.pl (panel „Moje GWO, zakładka „Multipodręczniki”).

Książki możesz przeglądać przez 30 dni od pierwszego uruchomienia.

ZAPROŚ NAS DO SWOJEJ SZKOŁY

Skontaktuj się z najbliższym koordynatorem, który w szczegółach przedstawi naszą ofertę.

woj. dolnośląskie
Ewa Chmielowska
tel. 693 090 039, e-mail: echmielowska@gwo.pl
Grzegorz Kalferszt
tel. 607 524 800, e-mail: gkalferszt@gwo.pl
Justyna Rejter
tel. 601 330 630, e-mail: jrejter@gwo.pl
Marta Wilczyńska
tel. 601 990 728, e-mail: mwilczynska@gwo.pl

woj. kujawsko-pomorskie
Lena Czygier
tel. 601 690 901, e-mail: lczygier@gwo.pl
Izabela Wisełka
tel. 601 691 868, e-mail: iwiselka@gwo.pl

woj. lubelskie
Marta Jonasz
tel. 601 990 618, e-mail: mjonasz@gwo.pl
Aleksandra Szymaniak
tel. 601 990 328, e-mail: aszymaniak@gwo.pl

woj. lubuskie
Magdalena Wójcik
tel. 601 578 129, e-mail: mwojcik@gwo.pl
Natalia Zwolińska
tel. 605 350 010, e-mail: nzwolinska@gwo.pl

woj. łódzkie
Piotr Chlebosz
tel. 601 990 774, e-mail: pchlebosz@gwo.pl
Maciej Ignaczak
tel. 605 135 957, e-mail: mignaczak@gwo.pl
Michał Kodłubański
tel. 601 556 053, e-mail: mkodlubanski@gwo.pl
Marta Wilczyńska
tel. 601 990 728, e-mail: mwilczynska@gwo.pl

woj. małopolskie
Magdalena Brzazgacz-Wichrowska
tel. 601 250 058, e-mail: mbrzazgacz@gwo.pl
Sławomir Buczyński
tel. 601 577 752, e-mail: sbuczynski@gwo.pl
Joanna Chronowska-Nycek
tel. 601 990 204, e-mail: jnycek@gwo.pl
Marcin Oleksy
tel. 607 885 521, e-mail: moleksy@gwo.pl

woj. mazowieckie
Jolanta Klawe-Guzek
tel. 601 990 280, e-mail: jguzek@gwo.pl
Agnieszka Majewska
tel. 601 575 459, e-mail: amajewska@gwo.pl
Joanna Markowska
tel. 605 056 011, e-mail: jmarkowska@gwo.pl
Michał Moskal
tel. 601 574 758, e-mail: mmoskal@gwo.pl
Sławomir Sakowski
tel. 601 630 078, e-mail: ssakowski@gwo.pl

woj. opolskie
Dorota Henel-Kociołek
tel. 695 750 153, e-mail: dkociolek@gwo.pl
Justyna Rejter
tel. 601 330 630, e-mail: jrejter@gwo.pl
Marta Wilczyńska
tel. 601 990 728, e-mail: mwilczynska@gwo.pl

woj. podkarpackie
Sławomir Buczyński
tel. 601 577 752, e-mail: sbuczynski@gwo.pl
Jaromir Pajda
tel. 607 774 405, e-mail: jpajda@gwo.pl

woj. podlaskie
Beata Krajewska
tel. 695 730 007, e-mail: bkrajewska@gwo.pl
Joanna Markowska
tel. 605 056 011, e-mail: jmarkowska@gwo.pl

woj. pomorskie
Mateusz Kisała
tel. 601 990 773, e-mail: mkisala@gwo.pl
Magdalena Oleszczuk
tel. 601 450 200, e-mail: moleszczuk@gwo.pl
Michał Pałczyński
tel. 601 576 552, e-mail: mpalczynski@gwo.pl

woj. śląskie
Magdalena Brzazgacz-Wichrowska
tel. 601 250 058, e-mail: mbrzazgacz@gwo.pl
Piotr Chlebosz
tel. 601 990 774, e-mail: pchlebosz@gwo.pl
Dorota Henel-Kociołek
tel. 695 750 153, e-mail: dkociolek@gwo.pl
Jolanta Miziewicz-Duśko
tel. 601 754 070, e-mail: jmiziewicz@gwo.pl
Marcin Oleksy
tel. 607 885 521, e-mail: moleksy@gwo.pl

woj. świętokrzyskie
Michał Moskal
tel. 601 574 758, e-mail: mmoskal@gwo.pl
Marcin Oleksy
tel. 607 885 521, e-mail: moleksy@gwo.pl

woj. warmińsko-mazurskie
Beata Krajewska
tel. 695 730 007, e-mail: bkrajewska@gwo.pl
Andrzej Kwiatkowski
tel. 607 077 747, e-mail: akwiatkowski@gwo.pl
Michał Pałczyński
tel. 601 576 552, e-mail: mpalczynski@gwo.pl

woj. wielkopolskie
Grzegorz Kalferszt
tel. 607 524 800, e-mail: gkalferszt@gwo.pl
Mateusz Kisała
tel. 601 990 773, e-mail: mkisala@gwo.pl
Marta Wilczyńska
tel. 601 990 728, e-mail: mwilczynska@gwo.pl
Magdalena Wójcik
tel. 601 578 129, e-mail: mwojcik@gwo.pl

woj. zachodniopomorskie
Mateusz Kisała
tel. 601 990 773, e-mail: mkisala@gwo.pl
Natalia Zwolińska
tel. 605 350 010, e-mail: nzwolinska@gwo.pl

Dokładny obszar działania koordynatorów można sprawdzić na koordynatorzy.gwo.pl.