

JAK SIĘ UCZY Z $M+$? **SPRAWDŹ NAS!**



Broszura zawiera gotowe materiały do przeprowadzenia lekcji w **1 klasie liceum lub technikum**:

- *Funkcja kwadratowa. Podsumowanie*
- *Nierówności kwadratowe*



Wstęp

Oddajemy w Państwa ręce zestaw materiałów, który umożliwia przeprowadzenie wraz z uczniami z 1 klasy liceum lub technikum (kształcących się wg podstawy dla zakresu rozszerzonego) zajęć z dwóch tematów działu *Funkcja kwadratowa*:

- *Funkcja kwadratowa. Podsumowanie,*
- *Nierówności kwadratowe.*

Do realizacji wskazanych zagadnień przygotowaliśmy odpowiednie fragmenty podręcznika oraz zbioru zadań. Ów zestaw poszerzyliśmy o dodatkowe pomoce – materiały dydaktyczne z bogatych zasobów udostępnianych bezpłatnie członkom klubu *M+*.

M+ odgruzowuje – sprytne zestawy zadań, które pomagają uczniom szybko odświeżyć wiedzę ze szkoły podstawowej przed realizacją nowych zagadnień dydaktycznych w 1 klasie liceum lub technikum.

Lekcje z wykopem – scenariusze niebanalnych zajęć lekcyjnych, które na długo zostaną w głowach uczniów. Punktem wyjścia jest ciekawy, niebanalny problem lub historia, która wydarzyła się naprawdę. Autorzy wyjaśniają zagadnienia matematyczne, wykorzystując dostępne przeciętnemu uczniowi narzędzia. Podążanie za proponowanym tokiem wykładu, odkrywanie tajemnicy sprawia, że lekcja zostaje na bardzo, bardzo długo w głowach uczniów.

Znajdź błąd – psychologia poznawcza podpowiada, że nauka na błędach (swoich bądź cudzych) to metoda z olbrzymim potencjałem do wykorzystania w edukacji dzieci i młodzieży. Przygotowane przez nas zestawy zadań ów fakt wykorzystują. Zadaniem uczniów jest wskazanie błędu w prezentowanych rozwiązaniach i skorygowanie go. Oczywiście błędy nie są zwykłymi pomyłkami rachunkowymi – weryfikujemy nimi zrozumienie zagadnień matematycznych przez Państwa podopiecznych.

Eksperymentarium z plusem – zbiór interaktywnych animacji. Umożliwiają uczniom samodzielne modelowanie wybranych zagadnień matematycznych i wyciąganie wniosków na bazie wprowadzanych zmian. To właśnie interaktywność naszego eksperymentarium wyzwala zaangażowanie u uczniów. Dzięki temu szybciej potrafią opanować, zrozumieć i ugruntować wiedzę – no i robią to z nieukrywaną przyjemnością.

Test do samodzielnej weryfikacji – wszyscy uczniowie mają dostęp do interaktywnych testów w Strefie ucznia www.gwo.pl/strefa-ucznia. To materiał, który wielu wykorzystuje do ostatnich przygotowań przed zbliżającymi się klasówkami. Chcemy pokazać go, gdyż w szybki, prosty i rzetelny sposób pozwala zweryfikować swoją wiedzę i umiejętności.

Mądre projekty – każdemu nauczycielowi zdarza się spotkać uczniów bardziej dociekliwych. Przygotowany materiał pozwala rozwijać potencjał takich właśnie osób – samodzielnie mogą zastosować zdobytą już wiedzę i umiejętności do bardziej złożonych zagadnień.

Wśród propozycji materiałów znajdują się także karty pracy stworzone przy wykorzystaniu *Kompozytora klasówek i kart pracy* – programu komputerowego służącego do szybkiego układania, zapisywania i drukowania różnych zestawów zadań z matematyki (w kilku wariantach). Zadania można dobierać m.in. według stopnia trudności oraz czasu potrzebnego na ich rozwiązanie. Do każdego zestawu zadań dołączony jest klucz odpowiedzi. Zachęcamy, aby wypróbować wersję demonstracyjną programu, odwiedzając stronę www.matematyka.kompozytorklasówek.gwo.pl.

Zdecydowaliśmy się także na zwrócenie Państwa uwagi na program *MatNau!* – interaktywny zbiór zadań z rozwiązaniami. Wchodząc na wskazaną stronę, otrzymają Państwo dostęp do wersji demonstracyjnej programu, który ma dwa oblicza. Dla nauczycieli to interaktywny zbiór zadań (do zakresu podstawowego). Szczególnie przydatny dla tych z Państwa, którzy lubią (i mają możliwość) wykorzystywać na lekcjach nowoczesne technologie. Dla ucznia to aplikacja, która motywuje do powtórek przed sprawdzianami i pomaga poprawić oceny z matematyki. Za pomocą krótkich filmów i komentarzy wyjaśnia krok po kroku, jak rozwiązywać różne typy zadań. Dodatkowo uczniowie mogą sprawdzić swoje umiejętności, wykonując interaktywne ćwiczenia.

Zapraszamy do wypróbowania *Matematyki z plusem* w czasie zajęć z uczniami. Wszystkich zainteresowanych naszymi propozycjami dydaktycznymi zachęcamy do odwiedzenia strony www.matematyka.gwo.pl.



M+ odgruzowuje

Zestaw zadań odświeżających wiedzę przed działem s. 3

Funkcja kwadratowa. Podsumowanie

Podręcznik (fragmenty) s. 7

Zbiór zadań (fragmenty) s. 13

Nierówności kwadratowe

Podręcznik (fragmenty) s. 18

Zbiór zadań (fragmenty) s. 23

Karty pracy z Kompozytora klasówek i kart pracy

Funkcja kwadratowa. Podsumowanie s. 28

Nierówności kwadratowe s. 32

Materiały dodatkowe do wykorzystania przy realizacji działu *Funkcje*

Zestaw zadań *Znajdź błąd* s. 37

Interaktywne animacje *Eksperymentarium z plusem* s. 38

Lekcje z wykopem. Zobacz, parabola s. 39

Funkcja kwadratowa – test ze Strefy ucznia s. 43

Praca badawcza *Mądre projekty. Parabola* s. 46

Multipodręczniki dla klas 1 i 2 s. 48

MatNau! – interaktywny zbiór zadań z rozwiązaniami s. 49



M+ ODGRUZOWUJE

FUNKCJA KWADRATOWA



Zadanie 1. Przedstaw sumę algebraiczną w postaci iloczynu.

a) $16x^2 - 9$

b) $25x^2 - 4$

c) $\frac{1}{81}x^2 - 3$

Zadanie 2. Zapisz w jak najprostszej postaci.

a) $2(x - 1)(x + 3)$

b) $-3(x + 2)^2 - 4$

Zadanie 3. Znajdź liczby oznaczone literami a i b i podaj współrzędne punktu leżącego na osi liczbowej, który jest równoodległy od liczb a i b .

a) $\sqrt{a} = 9, \sqrt{b} = 8$

b) $\sqrt{a} = \frac{1}{4}, \sqrt{b} = \frac{1}{2}$

Zadanie 4. Które z podanych równań nie ma rozwiązania?

A. $-x^2 + 2x - 1 = 0$

B. $x^2 - 12x + 36 = 0$

C. $2x^2 - 5x + 6 = 0$

D. $3x^2 - 4x + 1 = 0$

Zadanie 5. Liczby x_1 i x_2 ($x_1 < x_2$) są rozwiązaniami równania $x^2 - x - 6 = 2(x - 3)^2$. Oblicz wartość wyrażenia $x_1 - x_2$.



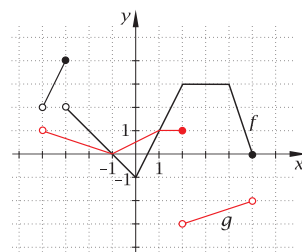
Zadanie 6. Suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych jest równa 3896. Co to za liczby?

Zadanie 7. Przedstaw funkcję f w postaci tabelki i narysuj jej wykres.

a) $f(x) = x^2$, dziedzina: $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$ b) $f(x) = 2x^2 - 1$, dziedzina: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

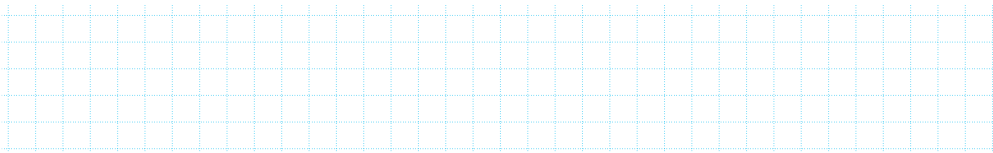
Zadanie 8. Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji f i g .

- Dla której z tych funkcji dziedziną jest przedział $(-4; 5)$?
- Podaj zbiory wartości funkcji f i g .
- Która z tych funkcji przyjmuje większą wartość dla $x = 2$? Ile jest równa ta wartość?
- Podaj przedziały, w których obie funkcje przyjmują wartości dodatnie.
- Dla jakich argumentów wartości funkcji f są mniejsze od wartości funkcji g ?
- Ile miejsc zerowych ma funkcja f , a ile — funkcja g ? Podaj te miejsca zerowe.



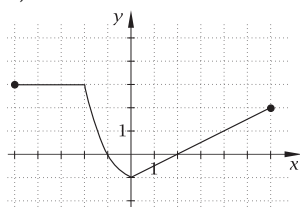


Zadanie 9. Dane są funkcje $f(x) = -4x + 3$ i $g(x) = 3x - 8$. Wyznacz zbiór wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g .

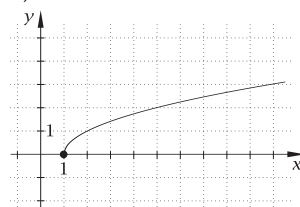


Zadanie 10. Podaj przedziały monotoniczności funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku.

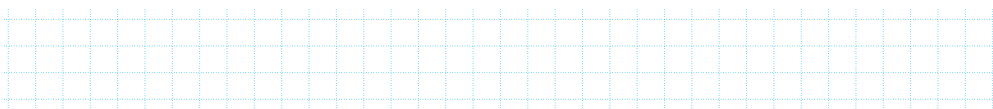
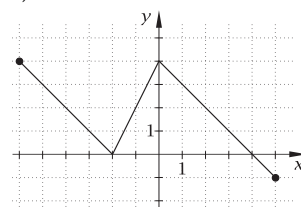
a)



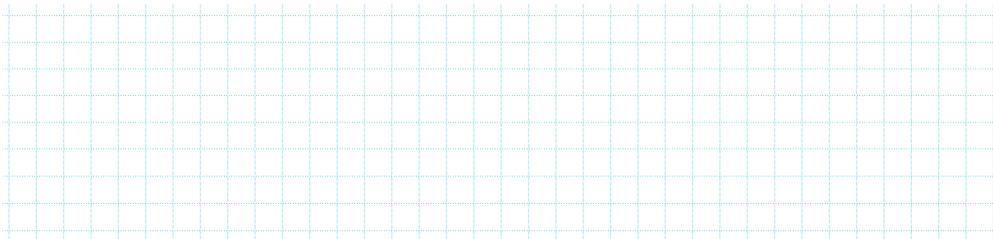
b)



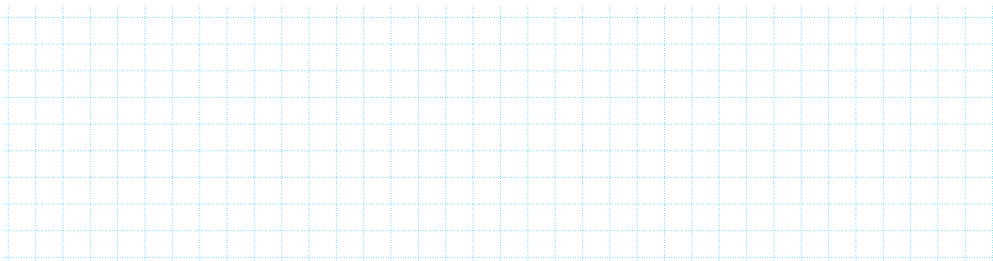
c)



Zadanie 11. Wykres pewnej funkcji liniowej przechodzi przez punkty $A = (1, 3)$ i $B = (4, -2)$. Wyznacz wzór tej funkcji.



Zadanie 12. Wykres funkcji $f(x) = 3x - 6$ przecina oś x w punkcie A , a wykres funkcji $g(x) = -x + 7$ przecina oś x w punkcie B . Wyznacz współrzędne punktu C przecięcia się wykresów tych funkcji oraz oblicz pole trójkąta ABC .





MATERIAŁY DO LEKCJI POŚWIĘCONYCH POJĘCIU FUNKCJI KWADRATOWEJ

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

zadanie 7–10 ► — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii

◄ ||| — odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem |||

● — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)

● — zadanie trudne

W zbiorze zadań przyjęto następujące oznaczenia:

12. — zadanie łatwe

12. — zadanieo średnim poziomie trudności

12. — zadanie trudne

Я — zadanie z zakresu rozszerzonego



FUNKCJA KWADRATOWA – PODSUMOWANIE

I Poniżej zebraliśmy informacje, jak można wykorzystać różne postaci wzorów funkcji kwadratowej do ustalenia jej miejsc zerowych i wierzchołka paraboli będącej jej wykresem.

wzór i wykres	Postać kanoniczna $f(x) = a(x - p)^2 + q$	Postać ogólna $f(x) = ax^2 + bx + c$	Postać iloczynowa $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
wierzchołek paraboli	$x_w = p$ $y_w = q$	$x_w = -\frac{b}{2a}$ $y_w = \frac{-\Delta}{4a}$ lub $y_w = f(x_w)$	$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_w = f(x_w)$
miejsca zerowe	Rozwiązanie równania $a(x - p)^2 + q = 0$ Miejsca zerowe spełniają więc równanie $(x - p)^2 = \frac{-q}{a}$ Liczba miejsc zerowych zależy od tego, czy $\frac{-q}{a}$ jest liczbą dodatnią, ujemną czy równą 0.	Rozwiązanie równania $ax^2 + bx + c = 0$ Jeśli $\Delta > 0$, to funkcja ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ Jeśli $\Delta = 0$, to funkcja ma jedno miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja nie ma miejsc zerowych.	Rozwiązanie równania $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ Miejscami zerowymi są liczby x_1 i x_2 .



PRZYKŁAD 1 a) Znajdź wzór funkcji kwadratowej, której wykres przecina oś układu współrzędnych w punktach $(1, 0)$, $(-5, 0)$, $(0, 15)$.

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -5$$

⋮ Miejscami zerowymi są liczby 1 i -5 .

$$y = a(x - 1)(x + 5)$$

⋮ Korzystamy z postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

$$15 = a(0 - 1)(0 + 5)$$

⋮ Punkt $(0, 15)$ należy do wykresu szukanej funkcji.

$$15 = -5a$$

$$a = -3$$

$$y = -3(x - 1)(x + 5)$$

⋮ Zapisujemy wzór funkcji.

b) Znajdź wzór funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(5, -7)$ przechodząca przez punkt $(3, -8)$.

$$p = 5, \quad q = -7$$

⋮ (p, q) to wierzchołek paraboli.

$$y = a(x - 5)^2 - 7$$

⋮ Korzystamy z postaci kanonicznej $y = a(x - p)^2 + q$.

$$-8 = a(3 - 5)^2 - 7$$

⋮ Punkt $(3, -8)$ należy do wykresu szukanej funkcji.

$$-1 = a \cdot 4$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}(x - 5)^2 - 7$$

⋮ Zapisujemy wzór funkcji.

c) Wykres funkcji $y = 5x^2$ przesunięto — otrzymana krzywa przecina oś y w punkcie $(0, -4)$ i przechodzi przez punkt $(-2, 6)$. Znajdź wzór otrzymanej funkcji.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

⋮ Korzystamy z postaci ogólnej wzoru.

$$a = 5$$

⋮ Wzór funkcji f ma taki sam współczynnik a jak wzór funkcji $y = 5x^2$.

$$c = -4$$

⋮ Wykres funkcji f przecina oś y w punkcie $(0, -4)$.

$$f(x) = 5x^2 + bx - 4$$

$$6 = 5 \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) - 4$$

⋮ Punkt $(-2, 6)$ należy do wykresu funkcji f .

$$6 = 20 - 2b - 4$$

$$b = 5$$

$$f(x) = 5x^2 + 5x - 4$$

⋮ Zapisujemy wzór funkcji.

ZADANIE a) Znajdź wzór funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są liczby 4 i 6 i której wykres przechodzi przez punkt $(0, 5)$.

b) Znajdź wzór funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie $(-2, 5)$ przechodząca przez punkt $(-3, 2)$.

c) Po przesunięciu wykresu funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7x$ otrzymano wykres funkcji g , który przecina oś y w punkcie $(0, 6)$ i przechodzi przez punkt $(2, 10)$. Znajdź wzór funkcji g .

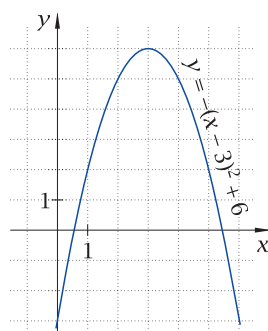
zadania 1-9 ►



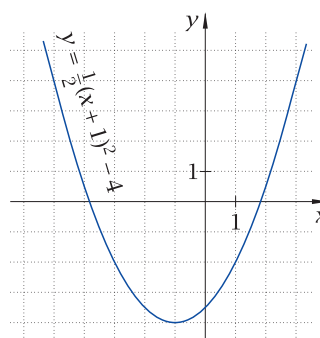
- II Gdy znamy wzór funkcji kwadratowej, to wiemy, jak są skierowane ramiona paraboli, która jest jej wykresem, i możemy stwierdzić, czy y_w (druga współrzędna wierzchołka paraboli) jest najmniejszą czy największą wartością funkcji. Można również ustalić, jaką najmniejszą i jaką największą wartość przyjmuje funkcja w danym przedziale.

ĆWICZENIE Ustal odpowiedź na pytanie, korzystając z wykresu lub wzoru.

a) Jaką najmniejszą i jaką największą wartość przyjmuje ta funkcja w przedziale $\langle 1; 5 \rangle$?



b) Jaką najmniejszą i jaką największą wartość przyjmuje ta funkcja w przedziale $\langle 1; 3 \rangle$?

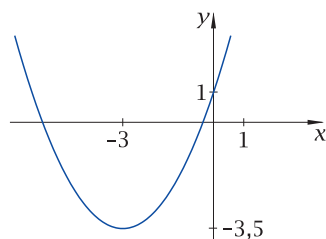


PRZYKŁAD 2 a) Jaką najmniejszą i jaką największą wartość przyjmuje funkcja $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 1$ dla argumentów z przedziału $\langle -10; 5 \rangle$?

$$x_w = -\frac{b}{2a} = \frac{-3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -3$$

$$x_w \in \langle -10; 5 \rangle$$

$$y_w = f(-3) = \frac{1}{2} \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 1 = -3,5$$



$$f(-10) = \frac{1}{2} \cdot (-10)^2 + 3 \cdot (-10) + 1 = 21$$

$$f(5) = \frac{1}{2} \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = 28,5$$

Odp. W przedziale $\langle -10; 5 \rangle$ najmniejszą wartością funkcji f jest $-3,5$, a największą jest $28,5$.

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f .

Ponieważ x_w należy do rozpatrywanego przedziału i ramiona paraboli skierowane są w górę, więc najmniejszą wartością jest y_w .

Szkicujemy wykres funkcji f , czyli parabolę o wierzchołku $(-3, -3,5)$ i ramionach skierowanych do góry.

Obliczamy wartości funkcji f na końcach rozważanego przedziału i spośród liczb $f(-10)$ i $f(5)$ wybieramy większą.



b) Jaką najmniejszą i jaką największą wartość przyjmuje funkcja $y = -3(x+2)^2 + 5$ w przedziale $\langle -12; -8 \rangle$.

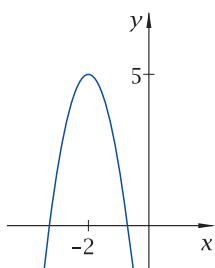
$$x_w = -2$$

$$x_w \notin \langle -12; -8 \rangle$$

$$f(-12) = -3(-12+2)^2 + 5 = -295$$

$$f(-8) = -3(-8+2)^2 + 5 = -103$$

∴ Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli nie należy do rozważanego przedziału, więc funkcja osiąga najmniejszą i największą wartość na końcach przedziału.



Odp. W przedziale $\langle -12; -8 \rangle$ najmniejszą wartością funkcji f jest -295 , a największą jest -103 .

ZADANIE a) Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$ w przedziale $\langle -9; 0 \rangle$.

b) Znajdź najmniejszą oraz największą wartość funkcji $f(x) = 2x^2 + \frac{3}{2}x - 1$ w przedziale $\langle -\frac{1}{2}; 2 \rangle$.

zadania 10–13 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Znajdź współrzędne wierzchołka oraz punktów przecięcia z osiami układu współrzędnych paraboli o podanym równaniu. Naszkicuj tę parabolę.

a) $y = \frac{1}{4}x^2 - x - 8$

d) $y = x(x+6)$

g) $y = -5(x+1)(3-x)$

b) $y = 3(x+2)^2 - 75$

e) $y = \frac{1}{3}x^2 - 3$

h) $y = -\frac{1}{2}(5-x)^2 + 2$

c) $y = -5x^2 + 30x - 40$

f) $y = -4x^2 + 2x$

i) $y = 3(x-10)^2$

2. Wykresem podanej funkcji jest parabola. Czy jej ramiona są skierowane w górę czy w dół? W którym punkcie ta parabola przecina oś y ?

a) $y = -3 - 2x + 4x^2$

b) $y = (5+x)(3-x)$

c) $y = -2(1-x)^2 + 2$

3. Ustal zbiór wartości podanej funkcji.

a) $y = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

d) $y = -\frac{2}{5}(x+5)^2 - 10$

e) $y = -(5-x)(x+2) - 10x$

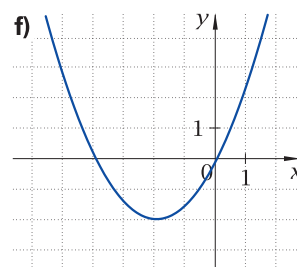
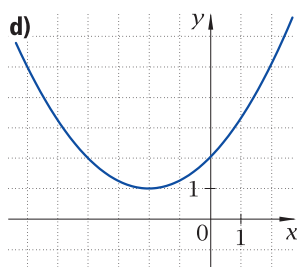
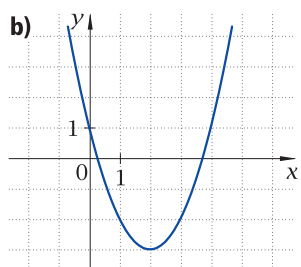
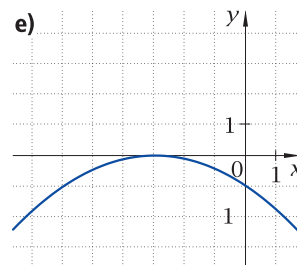
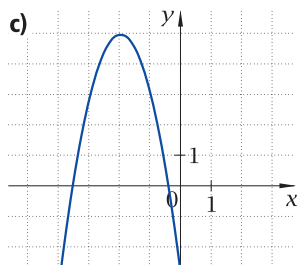
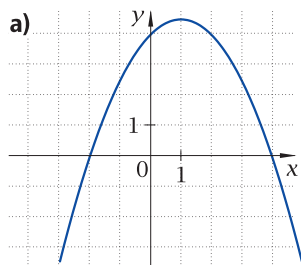
b) $y = \frac{3}{4}(x-2)(x-6)$

d) $y = 5x^2 + 4x - 7x^2$

f) $y = -3(2+x) + 4x^2$



4. Podaj wzór funkcji, której wykres przedstawiono na rysunkach.



5. Znajdź wzór funkcji kwadratowej, która spełnia podany warunek.

- Wykres funkcji przechodzi przez punkty $(0, 3)$, $(1, 2)$ i $(-1, 8)$.
- Wykres funkcji jest parabolą o wierzchołku w punkcie $(-3, 2)$, która przechodzi przez punkt $(0, 5)$.
- Miejscami zerowymi funkcji są liczby 2 i 6, a punkt $(4, -1)$ należy do jej wykresu.
- Funkcja ma największą wartość równą 2, a jej wykres jest symetryczny względem osi y i przechodzi przez punkt $(100, 1)$.

6. Znajdź wzór funkcji kwadratowej, której wykres ma z prostą $y = -1$ jeden punkt wspólny, a prosta $y = -2$ przecina ten wykres w punktach $(-5, -2)$ i $(1, -2)$.

7. Podaj przykład wzoru funkcji kwadratowej, która spełnia podany warunek.

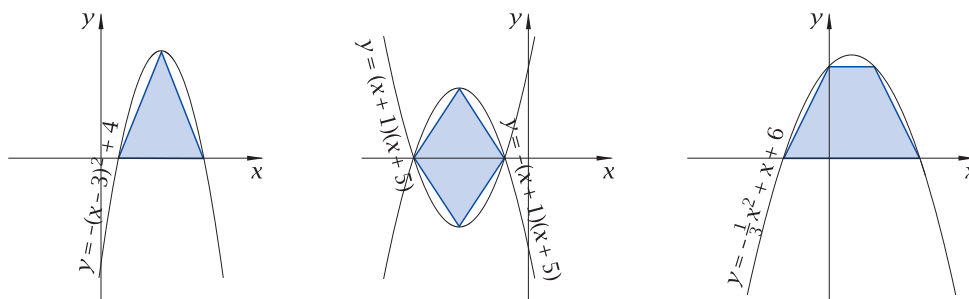
- Funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2)$ i rosnąca w przedziale $(-2; +\infty)$.
- Punkt $(0, 6)$ należy do wykresu funkcji i funkcja przyjmuje wartość największą.
- Funkcja przyjmuje wartości dodatnie tylko dla argumentów z przedziału $(-3; 7)$.
- Dla argumentu $x = 3$ funkcja przyjmuje wartość największą równą -3 .
- Funkcja przyjmuje wartość największą równą 2 i jej wykres przecina oś y w punkcie $(0, -3)$.

8. Naszkicuj wykresy odpowiednich funkcji i korzystając z tych wykresów, określ ile punktów wspólnych mają podana parabola i prosta.

- $y = -5x^2 + 7$ i $y = 3$
- $y = 2x^2 - 3x - 1$ i $y = -2$
- $y = 5(x - 3)(x - 7)$ i $y = -20$
- $y = -3(x - 7)^2 + 11$ i $y = 12$



9. Na poniższych rysunkach zacięniowano trójkąt równoramienny, romb i trapez równoramienny. Oblicz ich pola.



10. Znajdź największą oraz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 7$ w przedziale:

- a) $\langle -1; 3 \rangle$ b) $\langle 2; 5 \rangle$ c) $\langle 6; 7 \rangle$

11. Znajdź najmniejszą oraz największą wartość funkcji $y = x^2 - 4x + 3$ w przedziale:

- a) $\langle 0; 3 \rangle$ b) $\langle 0; 5 \rangle$ c) $\langle -1; 0 \rangle$

12. Znajdź największą oraz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 10(x+6)(x+4)$ w przedziale:

- a) $\langle -10; -8 \rangle$ b) $\langle -6; 4 \rangle$ c) $\langle -1; 2 \rangle$

13. Znajdź najmniejszą i największą wartość podanej funkcji w przedziale $\langle -1; 3 \rangle$.

- a) $y = 3(x-1)^2 - 7$ b) $y = -2(x-2)(x-6)$ c) $y = -4x^2 - 4x + 8$

MINISPRAWDZIAN

51. Ustal, jaka jest różnica między największą a najmniejszą wartością funkcji $f(x) = -\frac{1}{3}(x+1)(x+5)$ w przedziale $\langle -4; 5 \rangle$.

- A. $2\frac{1}{3}$ B. 19 C. 21 D. $21\frac{1}{3}$

52. Wykres jednej z podanych funkcji kwadratowych ma wierzchołek leżący w tym samym punkcie co wierzchołek wykresu funkcji $y = -7(x+1)^2 - 6$.

- A. $y = -2x^2 + 3x + 8$ C. $y = x^2 + 2x - 5$
B. $y = -7(x-2)(x+4)$ D. $y = -\frac{4}{7}(x-1)(x+3)$

53. O pewnej funkcji kwadratowej f wiadomo, że dla $x = 0$ przyjmuje największą wartość. Która z podanych wartości funkcji f jest najmniejsza?

- A. $f(-3)$ B. $f(0)$ C. $f(1)$ D. $f(5)$

**FUNKCJA KWADRATOWA – PODSUMOWANIE**

61. Określ liczbę miejsc zerowych podanej funkcji.

a) $f(x) = -15(x+4)^2 - 124$

d) $f(x) = -\frac{5}{7}\left(x + \frac{2}{9}\right)^2$

b) $f(x) = 1,3(x-2,6)^2 - 5,8$

e) $f(x) = -0,01x^2 + 2x - 100$

c) $f(x) = 0,1(x-1,34)(x-0,87)$

f) $f(x) = 2x^2 + 3x + 449$

62. W jakim przedziale podana funkcja jest rosnąca?

a) $f(x) = 98(x+19)^2 - 73$

d) $f(x) = x^2 - 20x - 509$

b) $f(x) = -\frac{5}{9}\left(x - \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{4}{5}$

e) $f(x) = -7,3(x-8,4)(x+1,4)$

c) $f(x) = -2,5x^2 + 55x - 23,9$

f) $f(x) = \frac{1}{6}\left(x - \frac{5}{8}\right)\left(x + \frac{5}{8}\right)$

63. Znajdź współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji.

a) $f(x) = -4,7(x-9,3)^2 + 1,4$

d) $f(x) = -x^2 - 10x - 1$

b) $f(x) = \frac{3}{7}\left(x + \frac{9}{11}\right)^2 - \frac{7}{9}$

e) $f(x) = 10(x+4)(x+6)$

c) $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$

f) $f(x) = -1,1(x-8)(x-2)$

64. Określ zbiór wartości podanej funkcji.

a) $f(x) = 0,12(x-7)^2 - 13,2$

d) $f(x) = 2 - 9x - 10x^2$

b) $f(x) = -\frac{7}{13}\left(x + \frac{1}{9}\right)^2 + \frac{5}{6}$

e) $f(x) = -(x-1)(x+11)$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x - 5$

f) $f(x) = 10(x-6)(x-4)$



65. Znajdź miejsca zerowe podanej funkcji (jeśli istnieją).

a) $y = x(x + 1)$

c) $y = x^2 + 5$

e) $y = (x - 2)(x + 3)$

b) $y = x^2 - 4$

d) $y = (x - 2)^2$

f) $y = (x + 3)^2$

66. Znajdź miejsca zerowe podanej funkcji (jeśli istnieją).

a) $f(x) = -\frac{6}{11}\left(x + \frac{2}{7}\right)\left(x - \frac{5}{8}\right)$

c) $f(x) = 9(x - 4)^2 + 25$

e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$

b) $f(x) = 7,3(x + 6,2)(x - 6,2)$

d) $f(x) = -3(x + 1)^2 + 12$

f) $f(x) = 6x^2 - x - 1$

67. Wykresy podanych funkcji przecinają się tylko w jednym punkcie. Znajdź współrzędne tego punktu.

a) $f(x) = -5(x - 7)(x - 3), g(x) = -5(x - 3)(x + 7)$

b) $f(x) = 4x^2 - 24x + 6, g(x) = 4x^2 + 12x + 6$

c) $f(x) = -7(x - 6)^2 - 8, g(x) = \frac{1}{7}(x - 6)^2 - 8$

68. Znajdź wzór funkcji kwadratowej (w dowolnej postaci), która spełnia podane warunki.

a) Miejscami zerowymi funkcji są liczby 6 i 7, a punkt $(5, -2)$ leży na jej wykresie.

b) Parabola, która jest wykresem funkcji, przechodzi przez punkt $(-9, 3)$, a jej wierzchołek ma współrzędne $(-10, -2)$.

c) Punkty $(0, -6)$, $(-1, -20)$ i $(1, -18)$ leżą na wykresie funkcji.

69. Zapisz w postaci iloczynowej i ogólnej wzór dowolnej funkcji kwadratowej, której miejscami zerowymi są podane liczby.

a) 5 i 7

b) -2 i 4

c) -5 i -3

70. Największa wartość funkcji f jest taka sama jak największa wartość funkcji $g(x) = -81(x + 72)^2 + 9$, a miejsca zerowe funkcji f są takie same jak miejsca zerowe funkcji $h(x) = 29(x - 1)(x + 3)$. Znajdź wzór funkcji f w postaci ogólnej.

71. Zapisz wzór podanej funkcji w postaci iloczynowej i kanonicznej.

a) $y = -3x^2 + 2x + 1$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

b) $y = x^2 + x\sqrt{2} - 4$

d) $y = \sqrt{3}x^2 + 6x - 9\sqrt{3}$

72. Zapisz w postaci ogólnej wzór funkcji kwadratowej o miejscach zerowych 4 oraz 6:

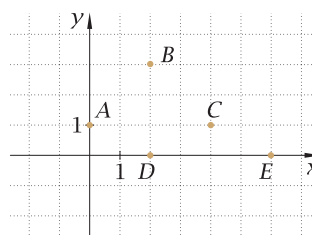
a) której największą wartością jest 3,

b) której najmniejszą wartością jest -1.



73. Znajdź postać ogólną wzoru funkcji kwadratowej, której wykres przechodzi przez wszystkie wierzchołki danego trójkąta.

- trójkąt ABC
- trójkąt CDE
- trójkąt ADE



74. Czy wykresy podanych funkcji się przecinają? Jeśli tak, to w jakich punktach?

- | | |
|--|---|
| a) $y = x^2$ i $y = 4x$ | e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ i $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ |
| b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ i $y = -3x + 6$ | f) $y = -2x^2 + 8x - 4$ i $y = 2x^2$ |
| c) $y = -x^2 + 4x - 3$ i $y = x - 3$ | g) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ i $y = \frac{3}{2}x^2 - 18x + 48$ |
| d) $y = x^2 - 4x + 5$ i $y = x + 1$ | h) $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$ i $y = -x^2 - 2x$ |

75. a) Ustal, w ilu punktach przecinają się wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$ oraz $g(x) = m$ w zależności od wartości m .

b) Ustal, dla ilu argumentów funkcja $h(x) = -\frac{2}{3}(x + 5)^2 - 7$ przyjmuje wartość t w zależności od wartości t .

c) Ustal, ile rozwiązań ma równanie $-4(x - 1)(x + 9) = p$ w zależności od wartości p .

76. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji f w podanym przedziale.

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = 3(x + 5)^2 - 10$, $\langle -6; 5 \rangle$ | d) $f(x) = 5(x - 1)(x - 5)$, $\langle -1; 6 \rangle$ |
| b) $f(x) = -2(x - 9)^2 + 3$, $\langle -1; 8 \rangle$ | e) $f(x) = -x^2 + 2x - 10$, $\langle 3; 10 \rangle$ |
| c) $f(x) = -(x + 6)(x - 2)$, $\langle 2; 4 \rangle$ | f) $f(x) = 2x^2 + 12x + 5$, $\langle -5; 0 \rangle$ |

77. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -2; 3 \rangle$.

- | | | |
|-----------------------|-------------------------|----------------------------|
| a) $f(x) = x^2 - 6$ | c) $f(x) = 2x^2 - 4x$ | e) $f(x) = x^2 - 8x + 1$ |
| b) $f(x) = -5x^2 + 4$ | d) $f(x) = -4x^2 - 12x$ | f) $f(x) = -3x^2 + 6x - 1$ |

78. a) Znajdź wzory funkcji, których wykresy otrzymano w wyniku odbicia symetrycznego względem osi x wykresów funkcji $f(x) = -7x^2 - 5x + 4$ oraz $g(x) = 6(x + 9)^2 - 8$.

b) Znajdź wzory funkcji, których wykresy otrzymano w wyniku odbicia symetrycznego względem osi y wykresów funkcji $f(x) = 6x^2 - 9x - 5$ oraz $g(x) = -7(x + 5)(x - 8)$.

c) Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku odbicia symetrycznego względem prostej $y = 3$ wykresu funkcji $f(x) = -4(x + 5)^2 - 6$.

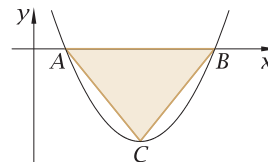
d) Znajdź wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku odbicia symetrycznego względem prostej $x = 7$ wykresu funkcji $f(x) = 5(x - 2)(x - 8)$.



79. a) Uzasadnij, że jeśli funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe, to pierwsza współrzędna wierzchołka jest ich średnią arytmetyczną.

b) Punkty (p, q) i (r, q) należą do paraboli. Wykaż, że pierwsza współrzędna wierzchołka tej paraboli jest równa $\frac{p+r}{2}$.

80. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez wierzchołki trójkąta równoramiennego ABC (zob. rysunek). Wyprowadź wzór na pole tego trójkąta w zależności od współczynników a, b, c .



81. Znajdź największą wartość funkcji $y = |2x^2 + 4x - 2|$ w przedziale $\langle -3; 3 \rangle$.

82. Określ, która z poniższych wartości funkcji $f(x) = -3x^2 - 9x + 12$ jest dodatnia.

$$f(1,0438) \quad f\left(-\frac{5\pi}{7}\right) \quad f(-2 - \sqrt{5}) \quad f\left(\frac{37}{145}\right) \quad f(\sqrt{55} - \sqrt{35})$$

83. Punkty $(-2, 0)$ i $(5, 0)$ leżą na wykresie funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wykaż, że współczynniki a i c mają przeciwne znaki, zaś b i c — takie same znaki.

84. Wykaż, że jeśli parabole $y = x^2 + px + q$ i $y = x^2 + qx + p$ ($p \neq q$) mają wspólne miejsce zerowe, to jest nim liczba 1 oraz spełniony jest warunek $p + q + 1 = 0$.

85. Niech $f(p)$ oznacza długość odcinka, którego końcami są miejsca zerowe funkcji $y = (x - 5)^2 + p$. Znajdź wzór funkcji f oraz narysuj jej wykres.



MATERIAŁY DO LEKCJI POŚWIĘCONYCH POJĘCIU NIERÓWNOŚCI KWADRATOWYCH

W podręczniku przyjęto następujące oznaczenia:

zadanie 7–10 ► — odsyłacz do zadań, które proponujemy rozwiązać po zapoznaniu się z odpowiednim fragmentem teorii

◄ ||| — odsyłacz do fragmentu teorii oznaczonego indeksem |||

● — zadanie nieelementarne (niekoniecznie trudne)

● — zadanie trudne

W zbiorze zadań przyjęto następujące oznaczenia:

12. — zadanie łatwe

12. — zadanie o średnim poziomie trudności

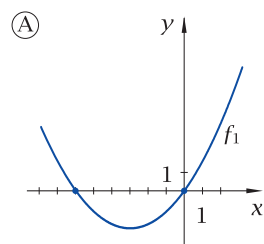
12. — zadanie trudne

Я — zadanie z zakresu rozszerzonego

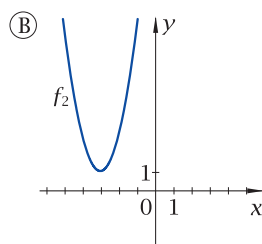


NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

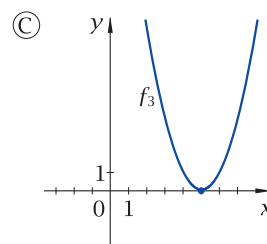
I **ĆWICZENIE** Poniżej narysowano wykresy kilku funkcji kwadratowych. Korzystając z narysowanych wykresów, określ zbiory rozwiązań podanych nierówności.



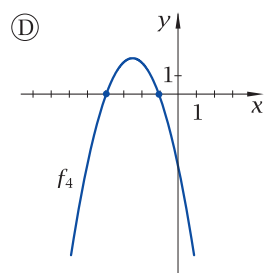
$$f_1(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x$$
$$\frac{1}{3}x^2 + 2x \leq 0$$



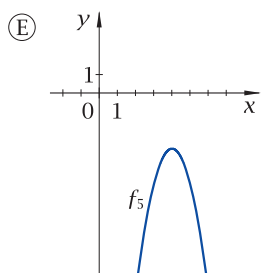
$$f_2(x) = 2x^2 + 12x + 19$$
$$2x^2 + 12x + 19 \geq 0$$



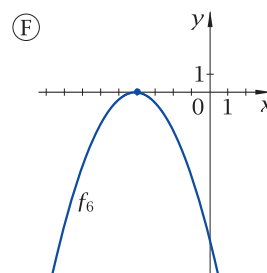
$$f_3(x) = x^2 - 10x + 25$$
$$x^2 - 10x + 25 > 0$$



$$f_4(x) = -x^2 - 5x - 4$$
$$-x^2 - 5x - 4 < 0$$



$$f_5(x) = -2x^2 + 16x - 35$$
$$-2x^2 + 16x - 35 > 0$$



$$f_6(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 8$$
$$-\frac{1}{2}x^2 - 4x - 8 \geq 0$$

Każdą z nierówności zapisanych obok można przekształcić tak, aby po jednej stronie znaku nierówności występowała liczba 0. Wówczas po drugiej stronie nierówności będzie wyrażenie opisujące pewną funkcję kwadratową. Rozwiązanie nierówności kwadratowej możemy odczytać z wykresu takiej funkcji.

Przykłady nierówności kwadratowych:

$$4x^2 - 2x \leq 7$$

$$3x^2 < 5$$

$$\frac{x^2}{2} \geq 3x - 1$$

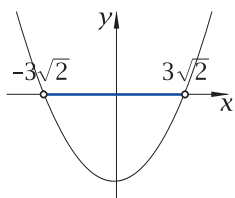
$$x^2 + x < 3x^2 - 6$$

Uwaga. Wykres, z którego mamy odczytać rozwiązanie nierówności, nie musi być zbyt dokładny — wystarczy znać miejsca zerowe funkcji (jeśli istnieją) i wiedzieć, jak skierowane są ramiona paraboli.



PRZYKŁAD Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 18 < 0$



$x \in (-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$

$x^2 - 18 = 0$

$x^2 = 18$

$x = 3\sqrt{2}$ lub $x = -3\sqrt{2}$

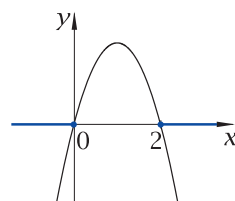
Obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = x^2 - 18$.

Zaznaczamy miejsca zerowe i szkicujemy wykres.

$a > 0$, więc ramiona są skierowane w górę.

Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności.

b) $-3x^2 + 6x \leq 0$



$x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$

$-3x^2 + 6x = 0$

$-3x(x - 2) = 0$

$x = 0$ lub $x - 2 = 0$

$x = 2$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = -3x(x - 2) = -3x^2 + 6x$.

Zaznaczamy miejsca zerowe i szkicujemy wykres.

$a < 0$, więc ramiona są skierowane w dół.

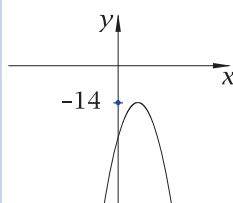
Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań nierówności.

c) $-(x - 7)^2 \geq 2x + 1$

$-(x^2 - 14x + 49) - 2x - 1 \geq 0$

$-x^2 + 14x - 49 - 2x - 1 \geq 0$

$-x^2 + 12x - 50 \geq 0$



Nierówność nie ma rozwiązań.

$-x^2 + 12x - 50 = 0$

$\Delta = 12^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-50) < 0$

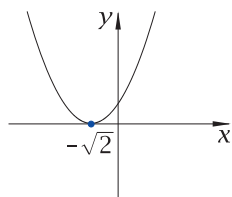
Przekształcamy nierówność.

Funkcja $y = -x^2 + 12x - 50$ nie ma miejsc zerowych, a jej wykres leży poniżej osi x (ramiona paraboli są skierowane w dół), zatem nierówność $-x^2 + 12x + 50 \geq 0$ nie ma rozwiązań.



d) $\frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} \leq -1$

$$\frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} + 1 \leq 0$$



$$x = -\sqrt{2}$$

$$\frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} + 1 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$x^2 + 2\sqrt{2} \cdot x + 2 = 0$$

$$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 8 = 8 - 8 = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

Obliczamy miejsca zerowe funkcji $y = \frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} + 1$ i szkicujemy jej wykres.

Szkicujemy wykres funkcji.

Nierówność $\frac{x^2}{2} + x\sqrt{2} + 1 \leq 0$ spełnia tylko liczba $-\sqrt{2}$.

ZADANIE Rozwiąż nierówność.

a) $2x^2 - 5x > 0$

b) $\frac{1}{2}x^2 + 4x < -8$

c) $3x - 2 \leq 5x^2$

zadania 1–15 ►

ZESTAW ZADAŃ

1. Rozwiąż nierówność.

a) $2(x-1)(x+3) \geq 0$

c) $\frac{5}{9}(x+13)(x+17) \geq 0$

e) $(x-0,5)^2 \leq 0$

b) $-2(x-5)(x-7) > 0$

d) $x(x-3) \leq 0$

f) $-2x(x+3) < 0$

2. Znajdź miejsca zerowe funkcji $y = -6x^2 - 5x + 4$, naszkicuj jej wykres, a następnie ustal rozwiązanie nierówności:

a) $-6x^2 - 5x + 4 > 0$

c) $6x^2 + 5x - 4 \geq 0$

e) $-12x^2 - 10x + 8 \leq 0$

b) $-6x^2 - 5x < -4$

d) $5x \leq 4 - 6x^2$

f) $x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{2}{3} < 0$

3. Rozwiąż nierówność.

a) $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

c) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$

e) $-\frac{1}{4}x^2 + 2x + 5 \leq 0$

b) $-3x^2 + x - 4 < 0$

d) $x^2 - x - 12 < 0$

f) $-4x^2 + 8x + 4 \geq 0$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 49 < 0$

c) $7x^2 + 2x > 0$

e) $-2(x-7)^2 < 0$

b) $3x^2 \geq 120$

d) $6x \geq 5x^2$

f) $\frac{2}{3}(x+5)^2 \leq 0$



5. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 5x > -6$

c) $5(x+3) \leq 2x(x+3)$

e) $-x(x-4) > (x-4)(x+1)$

b) $5x - 10 < 2x^2$

d) $10x < (3x-1)(x+2)$

f) $3x(7-2x) \leq (5x+1)(4-x)$

6. Rozwiąż nierówność.

a) $5(x-2)(x+2) + x \geq 25(1-x)$

c) $2(x-3)^2 - 1 > 7(2-x)$

b) $5x - 1 \leq (2x-1)^2$

d) $(x-2)^3 \leq (x+1)^3 + 9$

7. Zbiór rozwiązań nierówności $x^2 - 4x - 21 < 0$ to przedział $(-3; 7)$. Korzystając z tej informacji, zapisz zbiór rozwiązań nierówności:

a) $x^2 - 4x - 21 \geq 0$

b) $-x^2 + 4x < -21$

c) $4x + 21 \geq x^2$

8. Wyznacz wszystkie argumenty, dla których:

a) wartości funkcji $y = x^2 + 3x - 20$ są mniejsze od 20,

b) wartości funkcji $y = x^2 + 2x - 33$ są większe od 66.

9. Znajdź wszystkie argumenty, dla których wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g .

a) $f(x) = -7x^2 + 14x + 9$

b) $f(x) = x^2 - x + 1$

c) $f(x) = 3x^2 - x - 2$

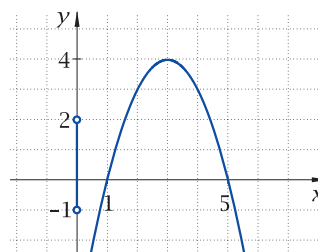
$g(x) = -5$

$g(x) = 2x + 1$

$g(x) = -x^2 + 2x + 3$

10. Znajdź wszystkie argumenty, dla których wartości funkcji $y = -x^2 + 8x - 22$ są większe od -15 i jednocześnie mniejsze od -7 .

11. Wyznacz wszystkie argumenty, dla których wartości funkcji kwadratowej (jej wykres przedstawiono na rysunku obok) należą do przedziału zaznaczonego na osi y .



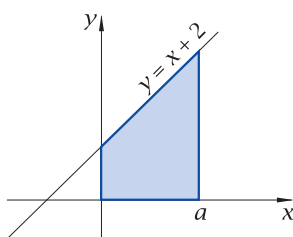
12. Wyznacz wszystkie liczby, które spełniają jednocześnie nierówności:

a) $x^2 - 3x - 10 > 0$ i $\frac{1}{2}x - 1 < 0$

c) $x^2 + 9x + 14 \geq 0$ i $x^2 - 2x \geq 15$

b) $-2x^2 + 13x - 15 < 0$ i $\frac{3}{2}x - 9 \geq 0$

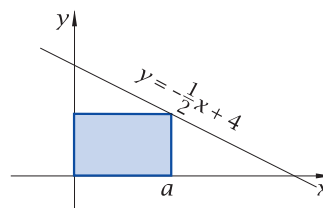
d) $2x^2 + 17x + 30 \geq 0$ i $-\frac{1}{2}x^2 - 4x < 8$



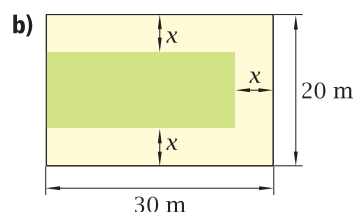
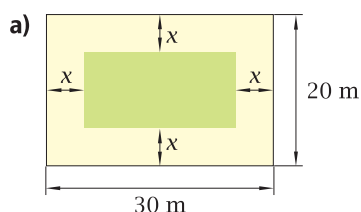
13. Rozważmy trapezy zbudowane tak, jak przedstawiono na rysunku obok. Pole trapezu zależy od liczby a ($a > 0$). Wyznacz wszystkie wartości a , dla których pola odpowiednich trapezów są większe od 510.



14. Na rysunku obok zacięniowano pewien prostokąt. Dla jakiej liczby a pole tego prostokąta jest większe od 5?

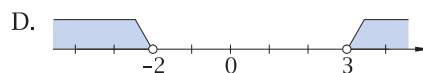
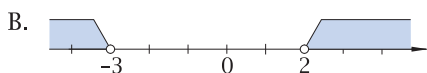
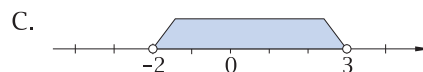
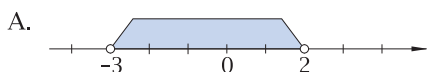


15. W prostokątnym ogrodzie o wymiarach $20\text{ m} \times 30\text{ m}$ chcemy założyć klomb z kwiatami tak, jak przedstawiono na rysunku (klomb to zacięniowany na zielono obszar). Jaka powinna być wartość x , aby klomb zajmował nie więcej niż połowę powierzchni ogrodu?



MINISPRAWDZIAN

S1. Zbiór rozwiązań nierówności $(x - 2)(x + 3) < 0$ jest przedstawiony na rysunku:



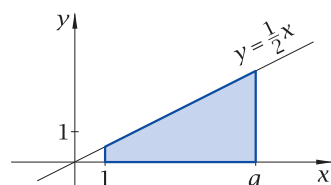
S2. Do zbioru rozwiązań nierówności $-2(x - 1)(x + 7) > 0$ należy liczba:

- A. -8 B. -6 C. 6 D. 8

S3. Zbiór, który przedstawiono na rysunku obok, jest zbiorem rozwiązań nierówności:



- A. $x^2 + 5x < 0$ B. $-x^2 + 5x > 0$ C. $-x^2 - 5x < 0$ D. $x^2 - 5x > 0$



S4. Na rysunku obok zacięniowano trapez. Dla jakich wartości a ($a > 0$) pole tego trapezu jest większe od 6 i mniejsze od 12?

- A. $a \in (4; 6)$ C. $a \in (6; 12)$
 B. $a \in (5; 7)$ D. $a \in (7; 14)$

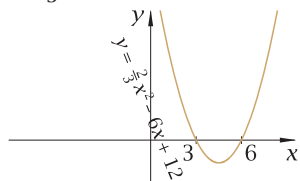




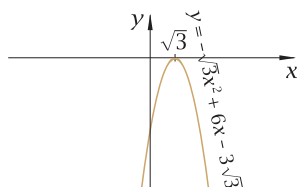
NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

86. Rozwiąż nierówność, korzystając z podanego wykresu.

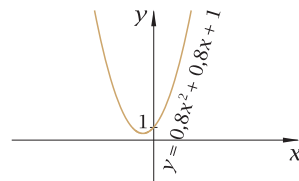
a) $\frac{2}{3}x^2 - 6x + 12 \leq 0$



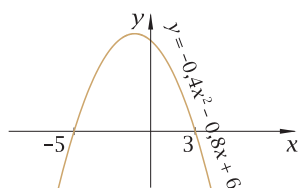
c) $-\sqrt{3}x^2 + 6x - 3\sqrt{3} \geq 0$



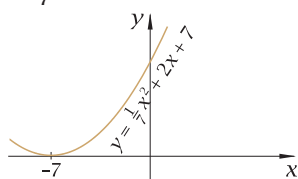
e) $0,8x^2 + 0,8x + 1 < 0$



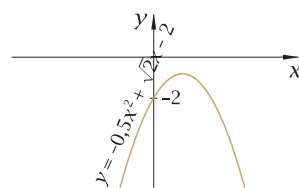
b) $-0,4x^2 - 0,8x + 6 < 0$



d) $\frac{1}{7}x^2 + 2x + 7 > 0$



f) $-0,5x^2 + \sqrt{2}x - 2 \leq 0$



NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

173



87. Ile rozwiązań ma podana nierówność?

a) $x^2 + 3 \geq 0$

d) $(x - 1)^2 \leq 0$

g) $-5x^2 + 2x - 1 > 0$

b) $x^2 - 1 \geq 0$

e) $(x - 1)^2 < 0$

h) $x^2 + 2x - 7 > 0$

c) $(x - 1)^2 \geq 0$

f) $x^2 - 3x + 10 > 0$

i) $-2x^2 + 5x + 3 \geq 0$

88. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 1 \geq 0$

c) $x^2 \geq x$

e) $3x^2 \geq 27$

g) $2x^2 + 5 \leq 0$

b) $x^2 - 2x > 0$

d) $x^2 + 2 > 0$

f) $-3x^2 \geq 2$

h) $(x + 7)(x - 5) \leq 0$

89. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - x + 2 > 0$

d) $x^2 + 6x + 9 > 0$

g) $-x^2 + 8x - 16 \leq 0$

b) $x^2 - x - 6 \leq 0$

e) $-x^2 + 18x - 81 \leq 0$

h) $x^2 + 3x + 15 < 0$

c) $-x^2 + x + 12 > 0$

f) $x^2 - 14x + 49 < 0$

i) $-x^2 + 3x + 10 < 0$

90. Rozwiąż nierówność.

a) $-6x^2 + x + 1 > 0$

e) $(x - 2)(x + 2) < 5x - 7$

i) $x^2 + \sqrt{12}x + 3 > 0$

b) $10x^2 + 8x + 0,7 \leq 0$

f) $9x + 5 < 2x^2$

j) $-3,5x^2 + 5x - \sqrt{5} \leq 0$

c) $\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x - 1 \geq 0$

g) $(x - 1,5)^2 \leq 6,25$

k) $4x^2 + 2\sqrt{5} - 2 < 0$

d) $x^2 - x - 0,2 > 0$

h) $(2x - 6)^2 \leq 4x - 13$

l) $x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{7}x + \sqrt{14} \leq 0$

91. a) Dla jakich argumentów wartości funkcji $y = x^2 - 2x + 2$ należą do przedziału $(2; +\infty)$, a dla jakich — do przedziału $\langle 0; 2 \rangle$?

b) Dla jakich argumentów wartości funkcji $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$ należą do przedziału $(-\infty; 3)$, a dla jakich — do przedziału $(1; 5)$?

92. Znajdź wszystkie liczby całkowite x spełniające nierówność.

a) $(x - 1,2)(x - 3,4) < 0$

d) $2x^2 - 0,6x - 16,2 < 0$

b) $-x^2 + 3,6x \geq 0$

e) $-\sqrt{2}x^2 + 8x - 6\sqrt{2} > 0$

c) $x^2 - 6,25 < 0$

f) $-\sqrt{3}x^2 + \sqrt{21}x + 42\sqrt{3} \leq 0$

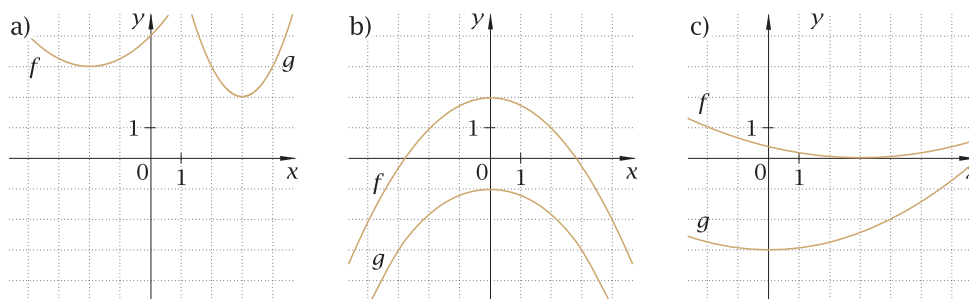
93. a) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = 2x^2 - 2x - 36$ przyjmuje wartości mniejsze niż funkcja $g(x) = x^2 - 1$?

b) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = x^2 - 2x + 9$ przyjmuje wartości większe niż funkcja $s(x) = 3x + 2$?



- c) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = -x^2$ przyjmuje wartości nie mniejsze niż funkcja $g(x) = 2x^2 - 5x - 2$?
- d) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 3$ przyjmuje wartości co najwyżej takie jak funkcja $g(x) = x^3 + x^2 + 2x$?
- e) Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = 2x^2 - x - 2 + \sqrt{x}$ przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x) = x^2 + \sqrt{x}$?

94. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości mniejsze niż funkcja g ?
Obie funkcje są funkcjami kwadratowymi.



95. Wyznacz zbiór liczb, które spełniają jednocześnie obie podane nierówności, oraz zbiór liczb, które spełniają co najmniej jedną z podanych nierówności.

- a) $x^2 - 1 > 0$, $x^2 + 3x \leq 0$ d) $x^2 + 4x + 1 \leq 0$, $-x^2 - 2 < 0$
 b) $x^2 - 2x > 0$, $-x^2 + 2x + 3 \geq 0$ e) $2x^2 - 5x + 1 \geq 0$, $x^2 - 3x + \frac{7}{4} < 0$
 c) $9x^2 + 9x + 2 < 0$, $9x^2 - 9x + 2 < 0$ f) $x^2 - \sqrt{7}x < 0$, $-x^2 + \sqrt{2}x + 3 > 0$

96. a) Rozwiąż nierówności $-x^2 + 4x \geq 0$ oraz $2(x-1)^2 - 8 > 0$, a następnie rozwiąż nierówność $(-x^2 + 4x)(2(x-1)^2 - 8) < 0$.

b) Rozwiąż nierówność $(x^2 - x - 6)(2x^2 - 11x + 5) \geq 0$.

97. Wyznacz zbiór.

- a) $\{x \in \mathbb{R}: 3x^2 - 2x + 5 > 0\} \cap \{1, 2, 3\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 5x + 7 \geq 0\}$
 b) $\{x \in \mathbb{R}: 2x^2 - 5x - 3 \leq 0\} \cap \mathbb{Z}$ d) $\mathbb{N} \setminus \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 13x + 40 \geq 0\}$

98. Znajdź dziedzinę funkcji.

- a) $f(x) = \sqrt{6x^2 + 7x - 3}$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-5x^2 - 3x + 2}}$ c) $f(x) = \frac{2 + \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 3x}}$

99. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność.

- a) $x^2y^2 + x^2 - 2xy^2 + y^2 \geq 0$ c) $-2x^2y^2 - 3x^2 + xy - y^2 - 2 < 0$
 b) $x^2y^2 + x^2 - xy + y^2 + 1 > 0$ d) $-3x^2y^2 - 2x^2 + 2xy - y^2 - 1 \leq 0$



100. Narysuj wykres funkcji $y = |x^2 - 4| - 1$, a następnie rozwiąż nierówność.

a) $|x^2 - 4| - 1 < 0$ b) $|x^2 - 4| \geq 1$ c) $1 \geq |x^2 - 4|$ d) $1 < |x^2 - 4|$

101. Dla jakich argumentów funkcja f przyjmuje wartości nieujemne?

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{dla } x \leq \frac{5}{3} \\ x^2 - 7x + 12 & \text{dla } x > \frac{5}{3} \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{dla } x \leq 1 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 7x + 10 & \text{dla } x < -2 \\ x^2 - 7x + 12 & \text{dla } x \geq -2 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 4 & \text{dla } x \leq -1 \\ x^2 - 4x - 5 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$



KARTY PRACY Utworzone z wykorzystaniem *KOMPOZYTORA* *KLASÓWEK I KART PRACY*

Więcej informacji o programie na www.matematyka.kompozytorklasowek.gwo.pl.



Zestaw zadań

str. 1/2
grupa **A**

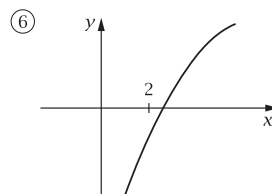
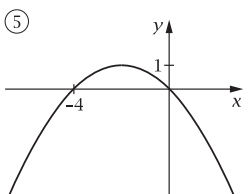
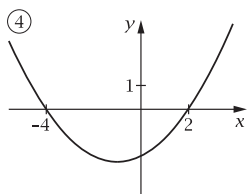
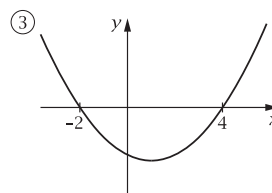
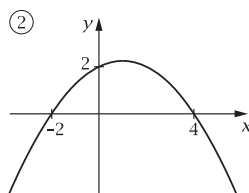
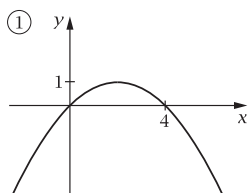
.....
imię i nazwisko

.....
lp. w dzienniku

.....
klasa

.....
data

- Funkcja kwadratowa, której wykres przechodzi przez punkty $(0, 4)$, $(-2, 2)$, $(4, -4)$, ma wzór:
 A. $y = 2x^2 + 5,5x + 4$ B. $y = -5x^2 - 4$ C. $y = x^2 - 3x + 4$ D. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$
- Parabolę będącą wykresem funkcji $f(x) = ax^2$ przesunięto 3 jednostki w prawo i otrzymano w ten sposób wykres funkcji g . Jaki jest wzór funkcji g , jeżeli wiadomo, że $g(-4) = -9,8$?
 A. $g(x) = -9,8(x - 3)^2$ C. $g(x) = -\frac{1}{5}(x - 3)^2$
 B. $g(x) = -0,3(x - 3)^2$ D. $g(x) = -9,8(x + 3)^2$
- Na rysunkach przedstawione są fragmenty wykresów funkcji kwadratowych. Dopasuj wzory do wykresów funkcji (wpisz w kratkach odpowiednie numery wykresów).

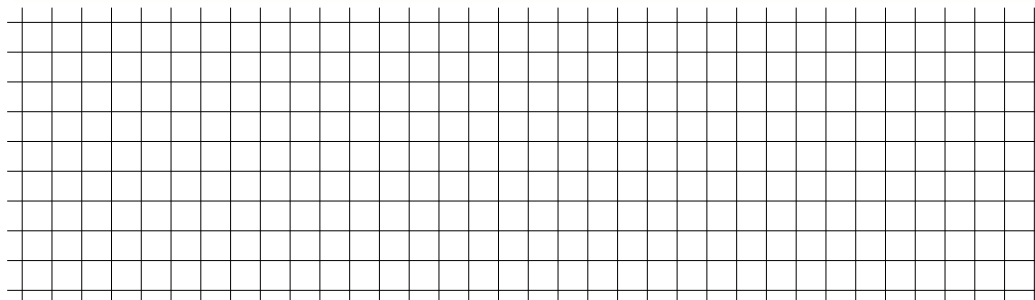


$y = -\frac{1}{4}(x + 2)(x - 4)$
 $y = \frac{1}{4}(x + 4)(x - 2)$

$y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 1$
 $y = -0,3x^2 + 4x - 8$

$y = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 + 1$
 $y = -\frac{1}{4}(x + 2)(x - 4)$

- Miejsce zerowe pewnej funkcji kwadratowej to $x = 1$, a wierzchołek paraboli – która jest jej wykresem – ma współrzędne $(3, -4)$. Wzór tej funkcji można zapisać w postaci:
 A. $y = (x - 3)^2 - 4$ C. $y = \frac{1}{2}(x - 1)(x + 5)$
 B. $y = -2(x - 3)^2 - 4$ D. $y = -\frac{1}{4}(x + 3)^2 + 4$
- Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $y = 2x^2 - 8x + 1$ dla argumentów z przedziału $(-3; 6)$.





6. Dana jest funkcja $y = 7x^2 + 3x - 1$.

- Oblicz najmniejszą wartość tej funkcji oraz argument, dla którego jest ona przyjmowana.
- Oblicz, ile wynoszą suma i iloczyn miejsc zerowych tej funkcji.
- Określ przedziały monotoniczności podanej funkcji.

7. Zapisz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, wiedząc, że do jej wykresu należą następujące punkty:
 $A = (1, -5)$, $B = (-2, 1)$, $C = (-3, -5)$.

8. Dane są funkcje: $f(x) = 25(x + 1)^3$ i $g(x) = 25x^3$. Dla jakiego argumentu x różnica $f(x) - g(x)$ jest najmniejsza? Ile jest wtedy równa?



Zestaw zadań

str. 1/2
grupa **B**

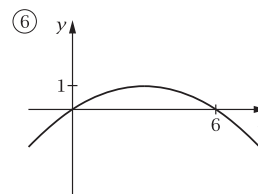
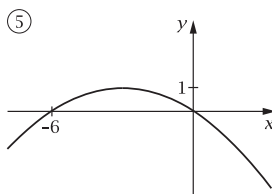
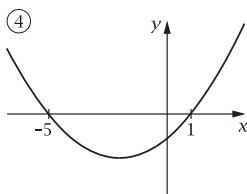
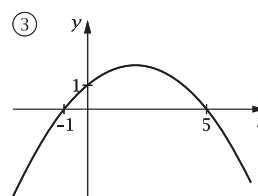
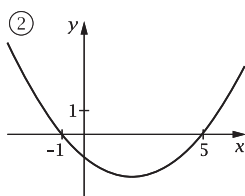
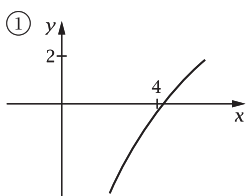
.....
imię i nazwisko

.....
lp. w dzienniku

.....
klasa

.....
data

- Funkcja kwadratowa, której wykres przechodzi przez punkty $(0, -2)$, $(1, -5)$, $(-2, -14)$, ma wzór:
A. $y = x^2 - 4x - 2$ B. $y = -x^2 - 2x - 2$ C. $y = 3x^2 - 2$ D. $y = -3x^2 - 2$
- Parabolę będącą wykresem funkcji $f(x) = ax^2$ przesunięto 3 jednostki w lewo i otrzymano w ten sposób wykres funkcji g . Jaki jest wzór funkcji g , jeżeli wiadomo, że $g(-2) = -4,5$?
A. $g(x) = -2(x - 3)^2$ C. $g(x) = 4,5(x + 3)^2$
B. $g(x) = -4,5(x + 3)^2$ D. $g(x) = -4,5(x - 3)^2$
- Na rysunkach przedstawione są fragmenty wykresów funkcji kwadratowych. Dopasuj wzory do wykresów funkcji (wpisz w kratkach odpowiednie numery wykresów).



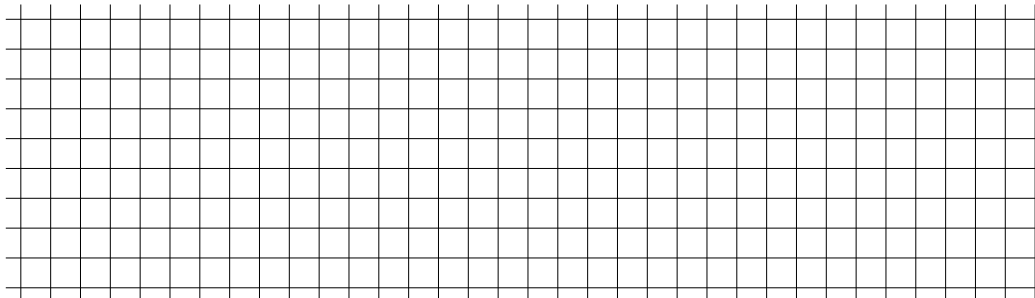
$y = -\frac{1}{9}(x - 3)^2 + 1$
 $y = -0,2x^2 + 3x - 9$

$y = \frac{1}{5}(x + 1)(x - 5)$
 $y = -\frac{1}{5}(x + 1)(x - 5)$

$y = \frac{1}{5}(x + 5)(x - 1)$
 $y = -\frac{1}{9}(x + 3)^2 + 1$

- Miejsce zerowe pewnej funkcji kwadratowej to $x = -5$, a wierzchołek paraboli — która jest jej wykresem — ma współrzędne $(-7, 2)$. Wzór tej funkcji można zapisać w postaci:
A. $y = -\frac{2}{169}(x - 7)^2 + 2$ C. $y = -\frac{1}{2}(x + 7)^2 + 2$
B. $y = -\frac{1}{8}(x - 1)(x + 5)$ D. $y = \frac{7}{9}(x + 2)^2 - 7$

- Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $y = x^2 - 4x + 7$ dla argumentów z przedziału $(-7; 3)$.





grupa **B**

str. 2/2

6. Dana jest funkcja $y = 5x^2 - 3x - 2$.

- Oblicz najmniejszą wartość tej funkcji oraz argument, dla którego jest ona przyjmowana.
- Oblicz, ile wynoszą suma i iloczyn miejsc zerowych tej funkcji.
- Określ przedziały monotoniczności podanej funkcji.

7. Zapisz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, wiedząc, że do jej wykresu należą następujące punkty:
 $A = (1, -2)$, $B = (2, 3)$, $C = (3, 12)$.

8. Dane są funkcje: $f(x) = 36(x + 1)^3$ i $g(x) = 36x^3$. Dla jakiego argumentu x różnica $f(x) - g(x)$ jest najmniejsza? Ile jest wtedy równa?



Zestaw zadań

str. 1/2
grupa **A**

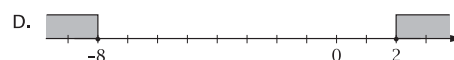
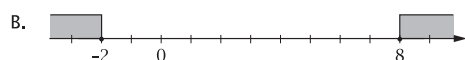
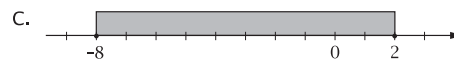
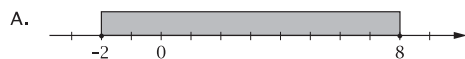
.....
imię i nazwisko

.....
lp. w dzienniku

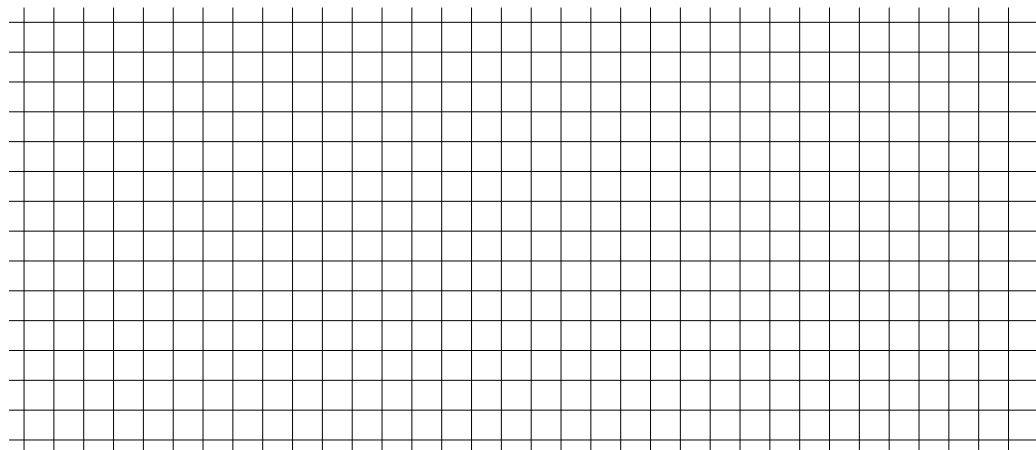
.....
klasa

.....
data

1. Zbiór rozwiązań nierówności $-x^2 - 6x + 16 \geq 0$ przedstawiony jest na rysunku:



2. Wśród rozwiązań nierówności $x^2 + x - 6 > 0$:
- A. nie ma liczby 0 .
B. nie ma liczb mniejszych od -1 .
- C. nie ma żadnej liczby z przedziału $(0; 3)$.
D. nie ma liczb większych od 2 .
3. Wśród rozwiązań nierówności $x^2 - 4x - 12 \leq 0$ znajdujemy dokładnie:
- A. siedem liczb naturalnych
B. sześć liczb naturalnych
- C. osiem liczb naturalnych
D. dwie liczby naturalne
4. Którą z podanych liczb należy wstawić w miejsce a , aby nierówność $-x^2 - 8x + a \geq 0$ była spełniona dokładnie przez jedną liczbę?
- A. 16 B. -16 C. 0 D. 2
5. Oblicz, dla jakich argumentów wartości funkcji $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ są mniejsze od wartości funkcji $g(x) = -2x - 2$.
- A. dla $x \in (-0,5; 3)$ C. dla $x \in (-\infty; -0,5) \cup (3; +\infty)$
B. dla $x \in (-3; 0,5)$ D. dla $x \in (-\infty; -3) \cup (0,5; +\infty)$
6. a) Narysuj wykresy funkcji $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ i $g(x) = x^2 + 2x + 1$.
b) Oblicz współrzędne punktów przecięcia wykresów tych funkcji.
c) Podaj argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości nie większe od wartości funkcji g .





7. Rozwiąż nierówność: $-3(x + 5)^2 < -19x - 79$.

8. Określ monotoniczność funkcji $f(x) = x^2 - 14x$ w przedziale, w którym funkcja $g(x) = -x^2 - 7x - 6$ przyjmuje wartości nieujemne.

9. Ile liczb całkowitych spełnia warunek: $-7 < x^2 - 6x + 1 < 1$?



Zestaw zadań

str. 1/2
grupa **B**

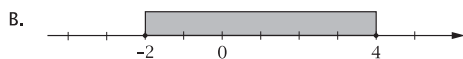
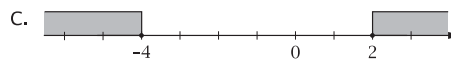
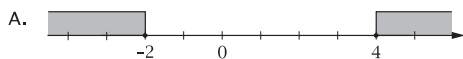
.....
imię i nazwisko

.....
lp. w dzienniku

.....
klasa

.....
data

1. Zbiór rozwiązań nierówności $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$ przedstawiony jest na rysunku:



2. Wśród rozwiązań nierówności $x^2 + 3x - 4 < 0$:

A. nie ma żadnej liczby z przedziału $(-3; 0)$.

C. nie ma liczb większych od 3.

B. nie ma liczby 0.

D. nie ma liczb mniejszych od -1.

3. Wśród rozwiązań nierówności $x^2 + 3x - 4 \leq 0$ znajdujemy dokładnie:

A. sześć liczb naturalnych

C. jedną liczbę naturalną

B. cztery liczby naturalne

D. dwie liczby naturalne

4. Którą z podanych liczb należy wstawić w miejsce a , aby nierówność $x^2 - 6x + a \leq 0$ była spełniona dokładnie przez jedną liczbę?

A. 9

B. 0

C. -9

D. 1

5. Oblicz, dla jakich argumentów wartości funkcji $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ są większe od wartości funkcji $g(x) = 2x + 4$.

A. dla $x \in (-\frac{1}{2}; 1)$

C. dla $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$

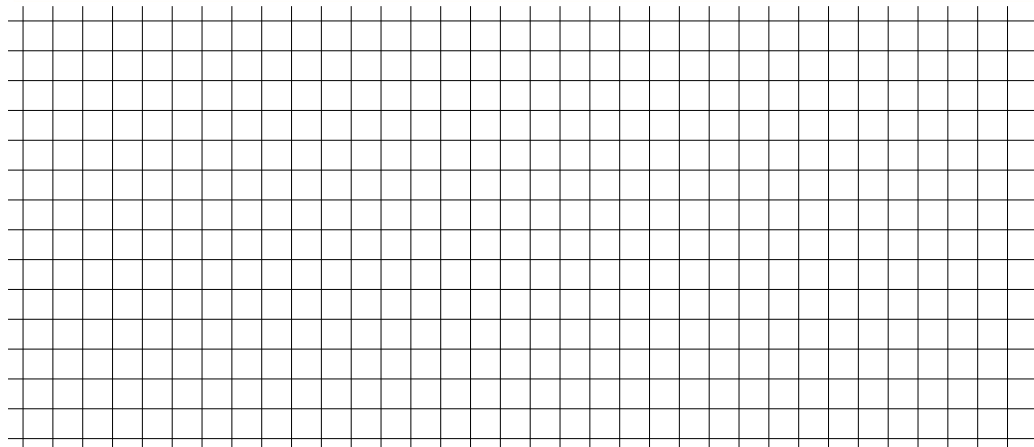
B. dla $x \in (-1; \frac{1}{2})$

D. dla $x \in (-\infty; -1) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$

6. a) Narysuj wykresy funkcji $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ i $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

b) Oblicz współrzędne punktów przecięcia wykresów tych funkcji.

c) Podaj argumenty, dla których funkcja f przyjmuje wartości nie większe od wartości funkcji g .





7. Rozwiąż nierówność: $-3(x + 2)^2 < 5x - 18$.

8. Określ monotoniczność funkcji $f(x) = x^2 + 4x$ w przedziale, w którym funkcja $g(x) = -x^2 + 6x + 7$ przyjmuje wartości nieujemne.

9. Ile liczb całkowitych spełnia warunek: $-5 < x^2 - 6x + 3 < 10$?



MATERIAŁY DODATKOWE DO WYKORZY-
STANIA PRZY REALIZACJI DZIAŁU *FUNKCJA*
KWADRATOWA



ZNAJDŹ BŁĄD

FUNKCJA KWADRATOWA



ZAKRES ROZSZERZONY

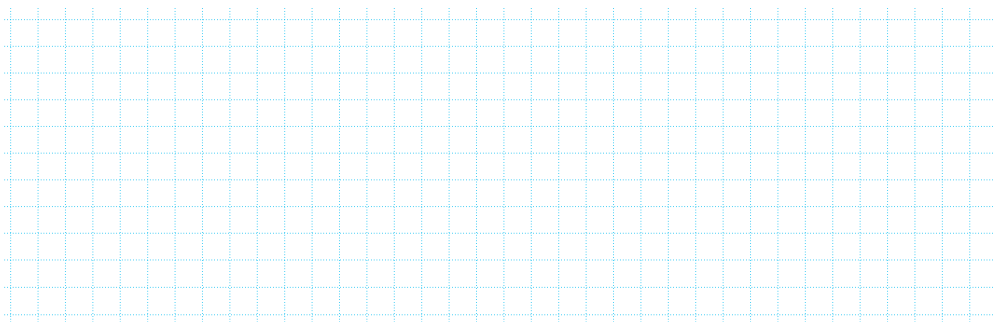
Zadanie 1. Poniżej podano wypowiedzi czterech uczniów. Niektóre z nich są błędne. Znajdź błędy i wyjaśnij, na czym one polegają.

Mieszko: *Jeśli dwie funkcje liniowe f i g są rosnące, to funkcja $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ też jest rosnąca w całej dziedzinie.*

Bolek: *Jeśli wykres funkcji liniowej f przecina oś y w punkcie $(0, m)$, to wykres funkcji $g(x) = [f(x)]^2$ przecina oś y w punkcie $(0, m^2)$.*

Włodek: *Jeśli miejscem zerowym funkcji liniowej f jest $x = p$, a miejscem zerowym funkcji liniowej g jest $x = q$, to pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, jest $x_w = \frac{pq}{2}$.*

Stas: *Jeśli funkcja liniowa f przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x < -1$, to funkcja $g(x) = [f(x)]^2$ przyjmuje wartość największą dla $x = -1$.*



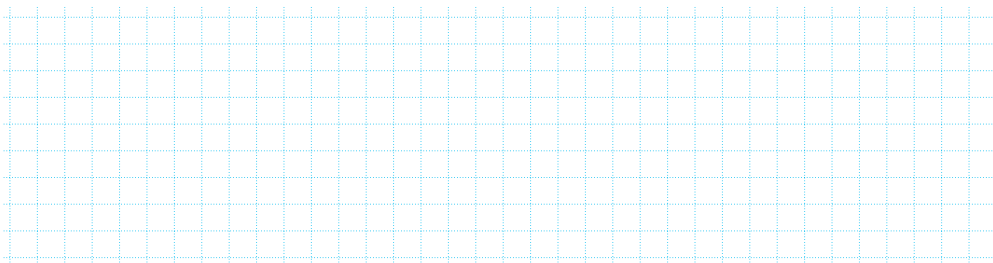
Zadanie 2. Które z poniższych zdań są fałszywe? Uzasadnij swoją odpowiedź.

A. Jeśli współczynniki we wzorze funkcji $f(x) = ax^2 + b$ spełniają warunek $ab > 0$, to funkcja ma dwa miejsca zerowe.

B. Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji $g(x) = ax^2 - x + 1$, ma współrzędne $(\frac{1}{a}, 1)$.

C. Jeśli funkcja $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - bx + c$ ma dwa miejsca zerowe, to pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji, jest równa b .

D. Funkcja $k(x) = x^2 + bx$ przyjmuje wartość najmniejszą dla $x = \frac{b}{2}$.



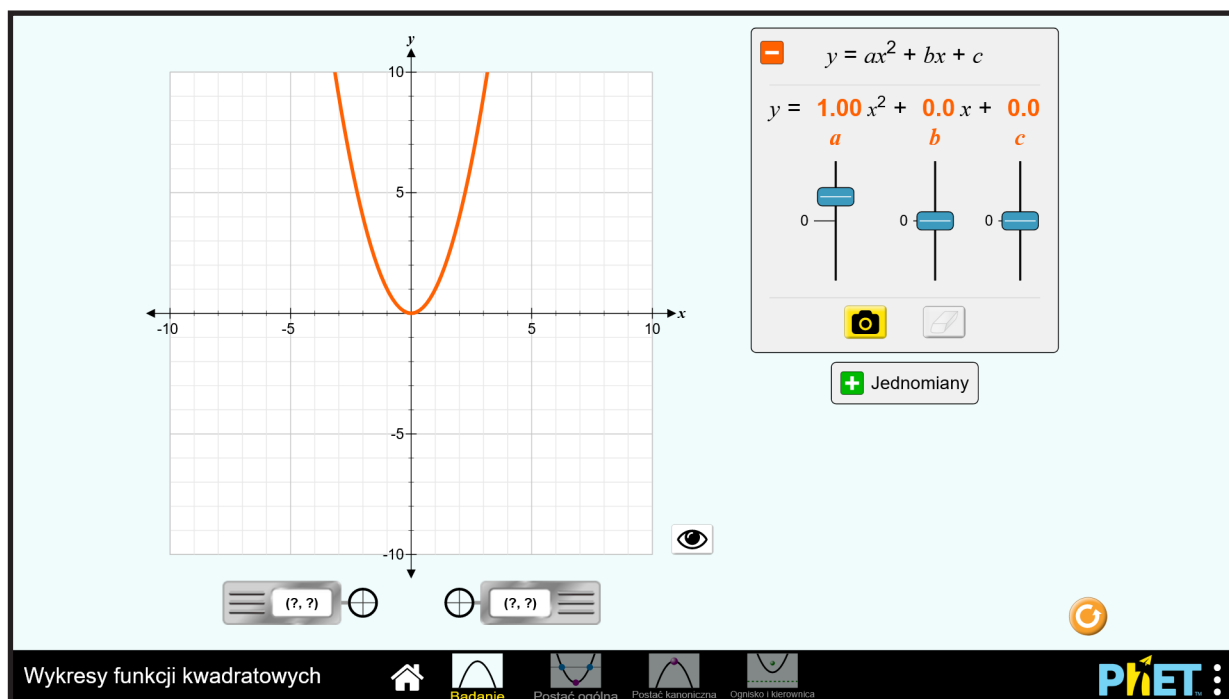
EKSPERYMENTARIUM Z PLUSEM

Ile jesteśmy w stanie trwale zapamiętać? Raptem jedną dziesiątą tego, co przeczytaliśmy. Połowę tego, co widzieliśmy lub słyszeliśmy. I niemal wszystko, bo aż 90% tego, co sami zrobiliśmy...

Eksperymentarium z plusem to seria interaktywnych animacji – tu się mnoży, buduje, a nawet strzela, czyli po prostu działa i uczy.

Wiadomości z działu Funkcja kwadratowa łatwiej zrozumieć, korzystając z animacji *Funkcja kwadratowa*.

Znajdziesz je na eksperymentarium.gwo.pl.





LEKCJE Z WYKOPEM

Zobacz, parabola

gdańskie
wydawnictwo
oświatowe



Zobacz, parabola

Lekcje z wykopem

Scenariusz lekcji dla nauczyciela





Zobacz, parabola

Opis: Uczeń ma okazję zobaczyć w realnym świecie krzywe zbliżone do parabol (będące dziełem natury albo człowieka). Korzystanie z programów graficznych uatrakcyjni zajęcia, aktywizuje uczniów, pozwala na szybkie sprawdzenie ich propozycji i na wielokrotne próby uwzględniające wciąż nowe poprawki. Uczeń powinien znać i rozumieć trzy postaci wzoru funkcji kwadratowej oraz ich związki z wykresami. Lekcja jest poświęcona doskonaleniu umiejętności związanych z tą tematyką.

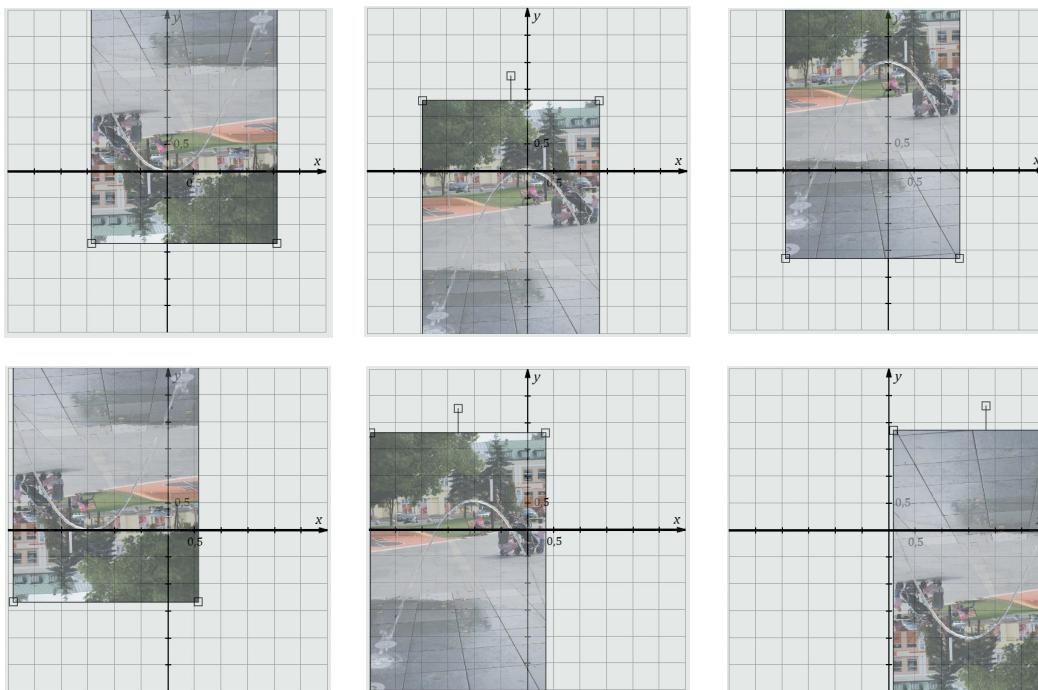
Uwagi: W scenariuszu wykorzystano aplikację zamieszczoną na stronie GWO: <https://gwo.pl/wykresy> oraz program *Wolfram Player* dostępny nieodpłatnie na stronie: <https://www.wolfram.com/cdf-player/>.

Przebieg lekcji:

1. Pokaz prezentacji PowerPoint *Parabole na co dzień*. (zob. dołączona prezentacja PowerPoint).

Uwaga. Prezentacja pokazuje trzy przykłady „naturalnego” występowania parabol. Jest tylko wstępem do kolejnych przykładów w następnym zadaniu.

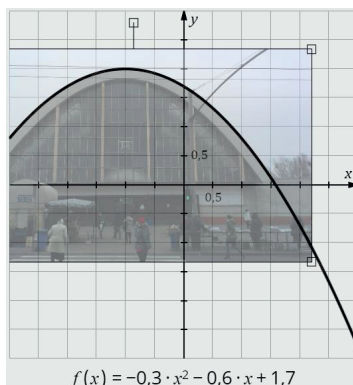
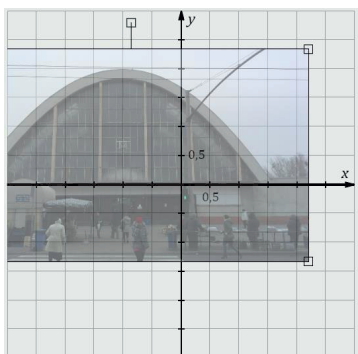
2. **Zadanie:** W układzie współrzędnych umieszczono zdjęcia kilku parabol. Znajdź ich wzory.



Uwaga. Korzystamy z aplikacji zamieszczonej na stronie GWO (<https://gwo.pl/wykresy>) oraz jednej z dołączonych fotografii. Nauczyciel może zdecydować, jakie ma być położenie zdjęć w układzie współrzędnych (niekoniecznie musi ono być takie, jak w powyższych przykładach) i ile tego rodzaju ćwiczeń trzeba przeprowadzić. Wzory powinny powstawać w trakcie ogólnoklasowej dyskusji (Co można odczytać ze zdjęcia w układzie współrzędnych? Jak te informacje wykorzystać? Którą postać wzoru najłatwiej otrzymać?). Nauczyciel powinien przedstawiać wykresy proponowanych przez uczniów funkcji (wpisując odpowiednie współczynniki w okienkach aplikacji) i razem z klasą porównywać je z oczekiwanymi. Poprawne odpowiedzi mogą powstawać w wielu krokach (zwłaszcza ustalenie współczynnika a zwykle wymaga kilku prób). Warto dodać, że na podstawie informacji, które można odczytać z wykresu, najłatwiej utworzyć wzór w postaci kanonicznej lub iloczynowej, ale by wprowadzić takie wzory do aplikacji, należy przekształcić je do postaci ogólnej.

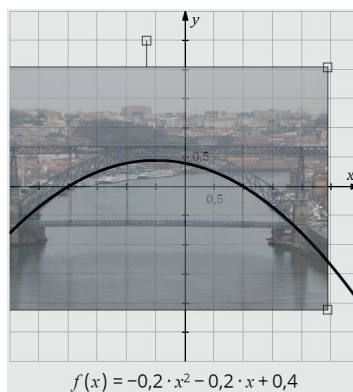
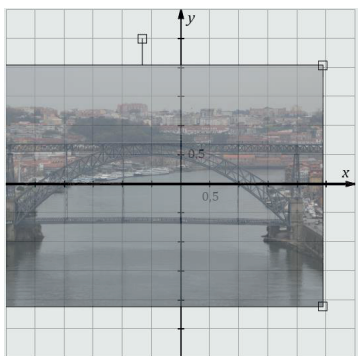


3. **Zadanie:** a) Znajdź wzór paraboli, którą tworzy górna krawędź konstrukcji hali targowej w Gdyni.



Uwaga. Ze zdjęcia w układzie współrzędnych można odczytać współrzędne wierzchołka paraboli $(-1, 2)$, więc najwygodniej rozpocząć od wzoru w postaci kanonicznej: $y = a(x + 1)^2 + 2$ i manipulować wartością współczynnika a . (**Odpowiedź:** $y = -0,3(x + 1)^2 + 2$)

b) Znajdź wzór paraboli, którą tworzy dolna krawędź konstrukcji mostu w Porto (Portugalia).



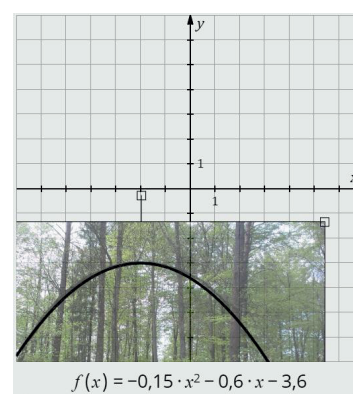
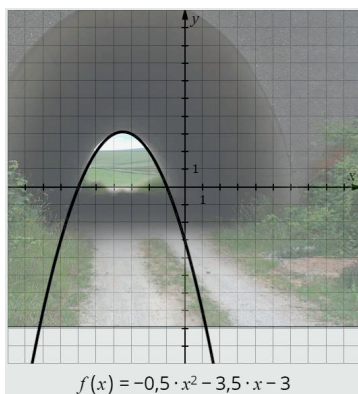
Uwaga. Ze zdjęcia w układzie współrzędnych można odczytać miejsca zerowe -2 i 1 , więc najwygodniej rozpocząć od wzoru w postaci iloczynowej: $y = a(x + 2)(x - 1)$ i manipulować wartością współczynnika a . (**Odpowiedź:** $y = -0,02(x + 2)(x - 1)$)

c) Znajdź wzór paraboli, którą tworzy wyjazd z tunelu.

d) Znajdź wzór paraboli, którą tworzy pień drzewa.

Odpowiedź: $y = -0,5(x + 1)(x + 6)$

Odpowiedź: $y = -0,15(x + 2)^2 - 3$





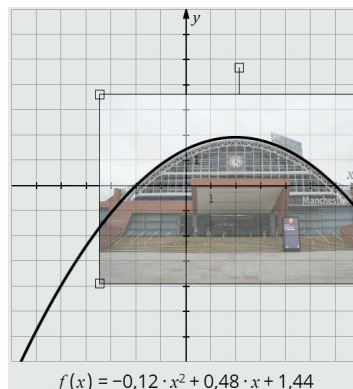
e) Znajdź wzór paraboli, którą tworzy dolny obrys pnia drzewa.

Odpowiedź: $y = 0,05(x - 1)^2 + 4$



f) Znajdź wzór paraboli, którą tworzy górna krawędź konstrukcji Manchester Central.

Odpowiedź: $y = -0,12(x + 2)(x - 6)$



4. **Zadanie:** Dopasuj wzór funkcji do wykresu.

Uwaga. Należy pobrać aplikację *Parabolic Function Game* (<https://demonstrations.wolfram.com/ParabolicFunctionGame>). Ćwiczenie polega na dopasowaniu wzorów (lista od 1 do 5) do narysowanych wykresów. Numer wybranego wzoru należy wpisać w okienku obok koloru wykresu („red” – czerwony, „blue” – niebieski, „green” – zielony, „black” – czarny, „yellow” – żółty). Po udzieleniu odpowiedzi po prawej stronie pojawiają się słowa „False” (fałsz) albo „True” (prawda) w kolorze odpowiadającym kolorowi wykresu. Ćwiczenie można wykonać wielokrotnie (z nowymi wykresami i wzorami) po naciśnięciu klawisza „Try again”.

5. **Zadanie:** Opisz, jak zmieniają się kształt i położenie paraboli o wzorze $y = ax^2 + bx + c$ w zależności od wartości parametrów a , b i c .

Uwaga. Należy pobrać aplikację *Plotting a Parabola* (<https://demonstrations.wolfram.com/PlottingAParabola>). Ostatnie dwa suwaki służą do ustawienia zakresu argumentów widocznych na układzie współrzędnych. Pozostałe suwaki pozwalają na zmianę (ale tylko w zakresie liczb całkowitych) parametrów a , b i c . Najlepiej zacząć od dyskusji konsekwencji zmiany parametru c . Ciekawą obserwacją (której dowód jest w zasięgu dobrego ucznia) jest fakt, że zmiana wartości parametru b (przy stałych a i c) powoduje przemieszczanie się wierzchołka paraboli wzdłuż innej paraboli.

Inną aplikacją o podobnym działaniu jest *How Does The Vertex Location of a Parabola Change* (<http://demonstrations.wolfram.com/HowDoesTheVertexLocationOfAParabolaChange>).

Podsumowanie

Nauczyciel: Jak się dziś przekonaliśmy, czasami wystarczy się rozejrzeć, aby zauważyć towarzyszące naszemu życiu parabole. Część z nich powstaje „naturalnie”, np. taki kształt ma tor lotu piłki czy kamienia, wzdłuż paraboli wytryska pod ciśnieniem woda z węża albo otworu fontanny. Część z nich stworzył człowiek jako elementy konstrukcji, zdobień, urządzeń technicznych. Trzeba jednak dodać, że nie zawsze krzywa, która wygląda jak parabola rzeczywiście nią jest. Swobodnie wiszący sznur czy łańcuch zaczepiony na końcach układa się wzdłuż tzw. krzywej łańcuchowej, która jest podobna do paraboli, a jednak się od niej nieco różni. Także wiele elementów konstrukcji budowlanych to nie parabole, a krzywe łańcuchowe, które charakteryzują się wyjątkowo dużą stabilnością.



Zadanie 1

Do wykresu funkcji $f(x) = a(x-2)^2 - 3$ należy punkt $(1, -4)$. Wskaż zdanie prawdziwe.

- Funkcja f jest malejąca w przedziale $\langle -2; +\infty \rangle$.
- Przedział $\langle -3; +\infty \rangle$ jest zbiorem wartości funkcji f .
- Przedział $\langle -\infty; -3 \rangle$ jest zbiorem wartości funkcji f .
- Funkcja f jest rosnąca w przedziale $\langle 2; +\infty \rangle$.

Zadanie 2

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Miejsca zerowe funkcji f są rozwiązaniami równania $|x-1| = 2$. Wynika stąd, że:

- $b = -2$ i $c = -3$
- $b = -4$ i $c = -3$
- $b = -4$ i $c = -6$
- $b = 4$ i $c = 6$

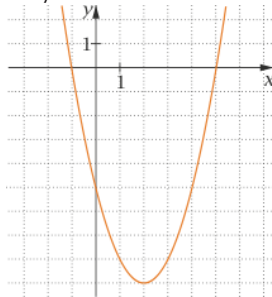
Zadanie 3

O jaki wektor należy przesunąć wykres funkcji $y = -3(x-1)^2 + 2$, aby otrzymać wykres funkcji $y = -3(x+1)^2 - 4$?

- $[2, -6]$
- $[-2, -6]$
- $[1, 2]$
- $[-1, -4]$

Zadanie 4

Wskaż wzór opisujący funkcję, której wykres przedstawiono na rysunku.



- $y = 2(x+1)(x-5)$
- $y = 3(x-2)^2 - 9$
- $y = x^2 + 4x - 5$
- $y = x^2 - 4x - 5$

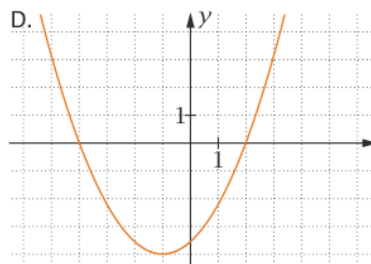
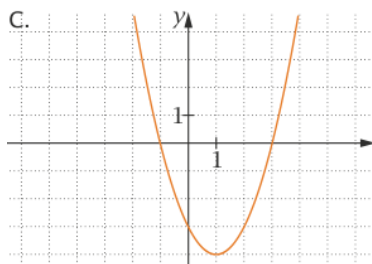
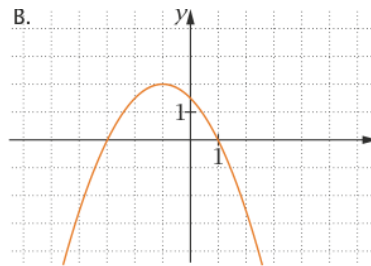
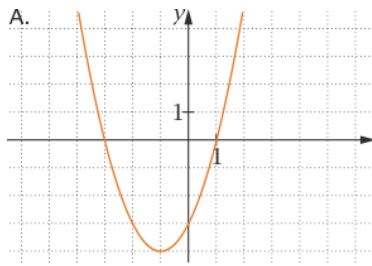


FUNKCJA KWADRATOWA

Test ze Strefy ucznia

Zadanie 5

Wskaż wykres funkcji, która ma takie same miejsca zerowe jak funkcja $y = -2x^2 - 4x + 6$ oraz taki sam wierzchołek jak parabola opisana wzorem $y = 2(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$.



- A
- D
- C
- B

Zadanie 6

Wskaż nierówność, która ma taki sam zbiór rozwiązań jak nierówność $x(x-3) \geq 3(\frac{2}{3}x-2)$.

- $-2(x-2)(x-3) \geq 0$
- $|x+2,5| \geq 0,5$
- $|x-2,5| \geq 0,5$
- $x^2-5x+6 \leq 0$

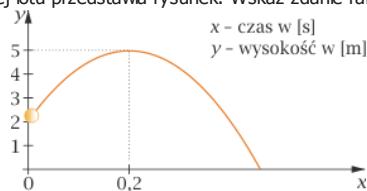
Zadanie 7

Która z podanych nierówności jest sprzeczna?

- $2x^2+3x+\sqrt{2} > 0$
- $x^2-2x+1 \leq 0$
- $-x^2+4x-4 > 0$
- $-x^2+\sqrt{3}x-6 < 0$

Zadanie 8

Z wysokości 2 metrów została wyrzucona piłka. Tor jej lotu przedstawia rysunek. Wskaż zdanie fałszywe.



- Piłka znalazła się na ziemi po około 0,5 sekundy od momentu wyrzutu.
- Torem lotu piłki jest parabola, którą można opisać wzorem $y = -75(x-\frac{1}{5})^2 + 5$.
- Piłka znalazła się w najwyższym położeniu po upływie 0,2 sekundy od momentu wyrzutu.
- Piłka znajdowała się na wysokości 2 metrów na początku rzutu i po upływie 0,3 sekundy od momentu wyrzutu.



Zadanie 9

Wskaż wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja $y = x^2 + mx + 1,25m$ ma dwa miejsca zerowe o różnych znakach.

- $m \in (-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$
- $m \in (-\infty; 0)$
- $m \in (5; +\infty)$
- $m \in (-\infty; 0 >$

Zadanie 10

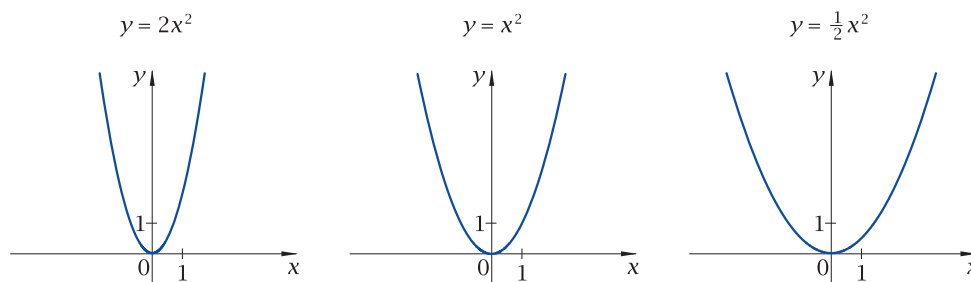
Wskaż wszystkie wartości parametru k , dla których rozwiązaniem nierówności $-2x^2 + (k+3)x - \frac{1}{2} \leq 0$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

- $k \in \{-5, -1\}$
- $k \in (-5; -1)$
- $k \in (-\infty; -5 > \cup < -1; +\infty)$
- $k \in < -5; -1 >$

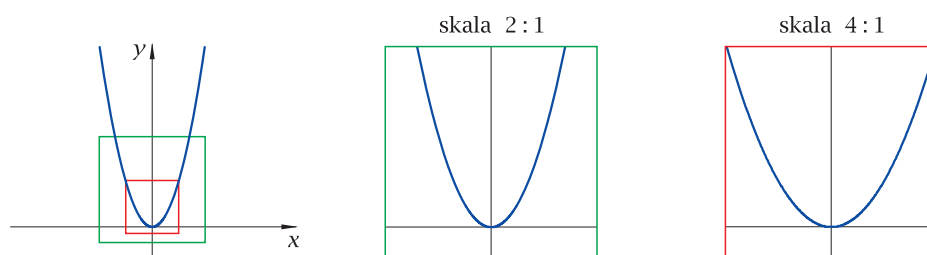


PARABOLA

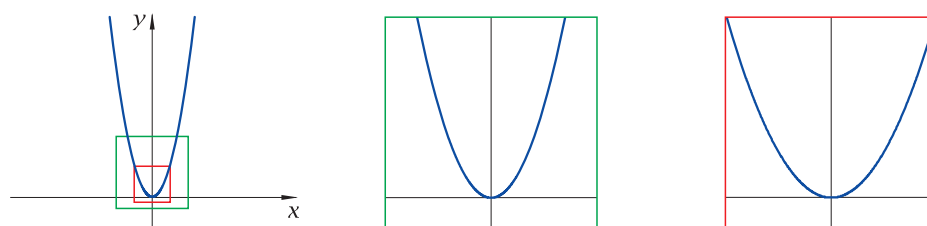
Przedstawione na rysunkach parabole są wykresami funkcji typu $y = ax^2$.



Na poniższych rysunkach przedstawiono parabolę $y = 2x^2$ oraz dwa jej fragmenty powiększone w skali 2:1 i 4:1.



Na kolejnych rysunkach przedstawiono parabolę $y = 3x^2$ oraz dwa jej powiększone (w pewnych skalach) fragmenty.



Zwróć uwagę, że kolejne powiększane fragmenty paraboli wydają się mieć coraz szerzej rozwarte ramiona. Powiększone parabole narysowane w zielonych ramkach wyglądają tak samo, jak wyżej narysowana parabola $y = x^2$, a parabole narysowane w czerwonych ramkach wyglądają tak, jak parabola $y = \frac{1}{2}x^2$.



Okazuje się, że gdy narysujemy dwie różne parabole (o różnych wzorach), to zawsze można jedną z nich tak powiększyć lub pomniejszyć, aby otrzymać drugą. Inaczej mówiąc, dowolne dwie parabole są figurami podobnymi.

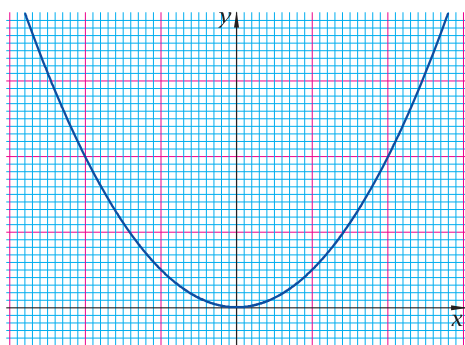
1. Narysuj na kartce dowolną parabolę o wierzchołku w początku układu współrzędnych. Wykonaj (np. za pomocą kserografu) powiększoną i pomniejszoną odbitkę twoich rysunków. Jakimi wzorami można by opisać otrzymane na odbitkach wykresy, gdyby przyjąć, że jednostka układu współrzędnych na odbitce jest taka sama, jak na twoim pierwotnym rysunku?

2. W układzie współrzędnych przyjmij za jednostkę 1 cm oraz narysuj wykres funkcji $y = x^2$. Narysuj wykres tej samej funkcji, przyjmując za jednostkę:

a) 0,5 cm

b) 1,5 cm

c) 2 cm



3. Na rysunku obok przedstawiono pewną parabolę. Dobierz tak jednostki na osiach układu, aby parabola ta była wykresem funkcji:

a) $y = x^2$

c) $y = \frac{1}{4}x^2$

b) $y = 2x^2$

d) $y = 0,1x^2$

4. Narysuj w układzie współrzędnych parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ i $y = 2x^2$. Jakimi wzorami opisane byłyby te parabole, gdyby jednostka była trzy razy większa? Jakimi wzorami opisane byłyby te parabole, gdyby jednostka była trzy razy mniejsza?



Co dalej?

Zbadaj, jaki jest związek między zmianą jednostki układu współrzędnych, a zmianą współczynnika we wzorze $y = ax^2$ opisującym daną parabolę.

Multipodręczniki dla klas 1 i 2 – zakresy podstawowy i rozszerzony

Dopasowane do umiejętności uczniów po 8-klasowej szkole podstawowej? Kształcą umiejętność budowania modeli? Dawkują wiadomości w łatwo przyswajalnych porcjach? Sprawdź.



Twój kod dostępu:

MASZ-NOWY-PODR

1. Wejdź na www.wpiszkod.gwo.pl.
2. Zaloguj się lub najpierw zarejestruj, jeśli nigdy wcześniej nie rejestrowałaś/eś się na www.gwo.pl.
3. Wpisz kod. Wpisujesz go tylko raz, potem przeglądasz podręczniki, logując się na www.gwo.pl (panel „Moje GWO, zakładka „Multipodręczniki“).



Książki możesz przeglądać przez 30 dni od pierwszego uruchomienia. Kod jest ważny do 30 czerwca 2021 r.



Interaktywne zadania
z matematyki dla liceum i technikum



Poznaj program online, który ułatwi Twoim uczniom:

- samodzielne opanowanie podstawowych umiejętności matematycznych,
- przygotowanie się do klasówek,
- poprawienie ocen.



ponad 640
interaktywnych zadań
ze zmiennymi danymi



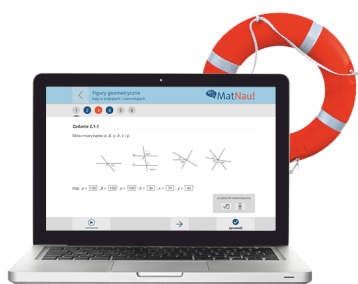
filmy i komentarze
z rozwiązaniami
krok po kroku



na komputer
i tablicę interaktywną



idealna pomoc
podczas zajęć w klasie,
a także lekcji zdalnych



Chcesz **bezpłatnie** wypróbować *MatNau!*
ze swoimi uczniami?

Napisz do nas na kontakt@gwo.pl.

Więcej informacji o programie na matnau.gwo.pl.

Dobry wynik na maturze?

Z nimi to pewne.

Arkusze maturalne

Książka pomaga skutecznie powtórzyć materiał z matematyki i dobrze przygotować się do matury. Dzięki publikacji uczniowie zapoznają się z formułą arkusza egzaminacyjnego oraz sprawdzą stopień opanowania wszystkich wymaganych wiadomości i umiejętności.



Repetitorium

Powtórka prowadzona według działów matematyki. Książka zawiera niezbędną teorię oraz zadania typu egzaminacyjnego, a przy każdym z nich odnośnik do wymagania szczegółowego, którego znajomość sprawdza zadanie. Dzięki temu można na bieżąco kontrolować opanowanie zagadnień.

Znajdziesz je na ksiegarnia.gwo.pl.

ZAPROŚ NAS DO SWOJEJ SZKOŁY

Skontaktuj się z najbliższym koordynatorem, który w szczegółach przedstawi naszą ofertę.

woj. dolnośląskie

Ewa Chmielowska

tel. 693 090 039, e-mail: echmielowska@gwo.pl

Grzegorz Kalferszt

tel. 607 524 800, e-mail: gkalferszt@gwo.pl

Justyna Rejter

tel. 601 330 630, e-mail: jrejter@gwo.pl

Marta Wilczyńska

tel. 601 990 728, e-mail: mwilczyńska@gwo.pl

woj. kujawsko-pomorskie

Lena Czygier

tel. 601 690 901, e-mail: lczygier@gwo.pl

Izabela Wisetka

tel. 601 691 868, e-mail: iwisetka@gwo.pl

woj. lubelskie

Marta Jonasz

tel. 601 990 618, e-mail: mjonasz@gwo.pl

Aleksandra Szymaniak

tel. 601 990 328, e-mail: aszymaniak@gwo.pl

woj. lubuskie

Magdalena Wójcik

tel. 601 578 129, e-mail: mwójcik@gwo.pl

Natalia Zwolińska

tel. 605 350 010, e-mail: nzwolinska@gwo.pl

woj. łódzkie

Piotr Chlebosz

tel. 601 990 774, e-mail: pchlebosz@gwo.pl

Maciej Ignaczak

tel. 605 135 957, e-mail: mignaczak@gwo.pl

Michał Kodłubański

tel. 601 556 053, e-mail: mkodlubanski@gwo.pl

Marta Wilczyńska

tel. 601 990 728, e-mail: mwilczyńska@gwo.pl

woj. małopolskie

Magdalena Brzazgacz-Wichrowska

tel. 601 250 058, e-mail: mbrzazgacz@gwo.pl

Sławomir Buczyński

tel. 601 577 752, e-mail: sbuczynski@gwo.pl

Joanna Chronowska-Nycek

tel. 601 990 204, e-mail: jnycek@gwo.pl

Marcin Oleksy

tel. 607 885 521, e-mail: moleksy@gwo.pl

woj. mazowieckie

Jolanta Klawe-Guzek

tel. 601 990 280, e-mail: jguzek@gwo.pl

Agnieszka Majewska

tel. 601 575 459, e-mail: amajewska@gwo.pl

Joanna Markowska

tel. 605 056 011, e-mail: jmarkowska@gwo.pl

Michał Moskal

tel. 601 574 758, e-mail: mmoskal@gwo.pl

Sławomir Sakowski

tel. 601 630 078, e-mail: ssakowski@gwo.pl

woj. opolskie

Dorota Henel-Kociołek

tel. 695 750 153, e-mail: dkociolek@gwo.pl

Justyna Rejter

tel. 601 330 630, e-mail: jrejter@gwo.pl

Marta Wilczyńska

tel. 601 990 728, e-mail: mwilczyńska@gwo.pl

woj. podkarpackie

Sławomir Buczyński

tel. 601 577 752, e-mail: sbuczynski@gwo.pl

Jaromir Pajda

tel. 607 774 405, e-mail: jpajda@gwo.pl

woj. podlaskie

Beata Krajewska

tel. 695 730 007, e-mail: bkrajewska@gwo.pl

Joanna Markowska

tel. 605 056 011, e-mail: jmarkowska@gwo.pl

woj. pomorskie

Mateusz Kisafa

tel. 601 990 773, e-mail: mkisala@gwo.pl

Magdalena Oleszczuk

tel. 601 450 200, e-mail: moleszczuk@gwo.pl

Michał Pałczyński

tel. 601 576 552, e-mail: mpalczynski@gwo.pl

woj. śląskie

Magdalena Brzazgacz-Wichrowska

tel. 601 250 058, e-mail: mbrzazgacz@gwo.pl

Piotr Chlebosz

tel. 601 990 774, e-mail: pchlebosz@gwo.pl

Dorota Henel-Kociołek

tel. 695 750 153, e-mail: dkociolek@gwo.pl

Jolanta Miziewicz-Duśko

tel. 601 754 070, e-mail: jmiziewicz@gwo.pl

Marcin Oleksy

tel. 607 885 521, e-mail: moleksy@gwo.pl

woj. świętokrzyskie

Michał Moskal

tel. 601 574 758, e-mail: mmoskal@gwo.pl

Marcin Oleksy

tel. 607 885 521, e-mail: moleksy@gwo.pl

woj. warmińsko-mazurskie

Beata Krajewska

tel. 695 730 007, e-mail: bkrajewska@gwo.pl

Andrzej Kwiatkowski

tel. 607 077 747, e-mail: akwiatkowski@gwo.pl

Michał Pałczyński

tel. 601 576 552, e-mail: mpalczynski@gwo.pl

woj. wielkopolskie

Grzegorz Kalferszt

tel. 607 524 800, e-mail: gkalferszt@gwo.pl

Mateusz Kisafa

tel. 601 990 773, e-mail: mkisala@gwo.pl

Marta Wilczyńska

tel. 601 990 728, e-mail: mwilczyńska@gwo.pl

Magdalena Wójcik

tel. 601 578 129, e-mail: mwójcik@gwo.pl

woj. zachodniopomorskie

Mateusz Kisafa

tel. 601 990 773, e-mail: mkisala@gwo.pl

Natalia Zwolińska

tel. 605 350 010, e-mail: nzwolinska@gwo.pl

Dokładny obszar działania koordynatorów można sprawdzić na koordynatorzy.gwo.pl.