gdańskie
wydawnictwo
oświatowe

Portowe bryły

Lekcje z wykopem

Scenariusz lekcji dla nauczyciela

Portowe bryły

Opis: Zdjęcia portowych magazynów i obiektów (wszystkie pochodzą z portu w Antwerpii w Belgii) dają pretekst do przećwiczenia zastosowań wzorów dotyczących pól powierzchni i objętości brył (głównie obrotowych) w sytuacjach praktycznych. Zadania mają nietypową formę: zawierają tylko pytania, bez potrzebnych danych. Uczniowie muszą się zastanowić, jakie informacje są potrzebne, by odpowiedzieć na pytania. Nauczyciel dysponuje danymi (tylko tymi, które są zamieszczone w tym scenariuszu) i przekazuje je uczniom dopiero wówczas, gdy o nie zapytają (jeśli uczeń spyta o dane spoza dostępnych w tym scenariuszu, nauczyciel odpowiada „nie mam takich informacji"). Zadania z punktów 1–6 nie wykraczają poziomem trudności poza wymagania dla zakresu podstawowego, pozostałe są nieco trudniejsze.

Uwagi: Uczniowie powinni znać i rozumieć wzory na obliczanie pól powierzchni i objętości brył obrotowych.

Przebieg lekcji:

1. Zadanie: Wszystkie daszki na poniższych zdjęciach zrobione są z blachy o tej samej grubości. Budowa którego z daszków pochłonęła najwięcej materiału?

Dane: Daszki nie mają „dna". Trójkątne ścianki pierwszego daszku mają kształt równoramiennych trójkątów prostokątnych o przyprostokątnej 30 cm; daszek ten ma 50 cm długości. Drugi daszek ma kształt stożka o kącie rozwarcia 60° i tworzącej 50 cm. Trzeci daszek ma kształt ostrosłupa o kwadratowej podstawie; krawędź podstawy ma długość 40 cm, a krawędź boczna ma długość 50 cm.

Odpowiedź:

Pole powierzchni pierwszego daszku: $2 \cdot \frac{30 \cdot 30}{2} + 2 \cdot 30 \cdot 50 = 3900$ [cm^2].

Pole powierzchni drugiego daszku: $\pi \cdot 25 \cdot 50 = 1250\pi \approx 3927$ [cm^2].

Pole powierzchni trzeciego daszku: $4 \cdot \frac{40 \cdot 10\sqrt{21}}{2} = 800\sqrt{21} \approx 3666$ [cm^2].

Wynika stąd, że najwięcej materiału pochłonął drugi daszek.

2. Zadanie: Zawartość ilu puszek z napojami wypełniłaby zbiornik przedstawiony na poniższym zdjęciu?

Dane: Walec ma średnicę 50 m i wysokość 15 m. Puszka zawiera 0,33 l napoju.

Odpowiedź:

Objętość zbiornika:

$$\pi \cdot 250^2 \cdot 150 \approx 29\,452\,431 \text{ dm}^3$$

Przyjmując, że trzy puszki zawierają litr napoju, aby napełnić zbiornik potrzeba około $29\,452\,431 \cdot 3 \approx 88\,000\,000$ *puszek.*

3. Zadanie: Popatrz na poniższe fotografie przedstawiające dwa zbiorniki w kształcie kuli.

a) Ile razy pojemność zbiornika *A* jest większa od pojemności zbiornika *B*?

b) Ile razy pole powierzchni zbiornika *A* jest większe od pola powierzchni zbiornika *B*?

Dane: Aby odpowiedzieć na te pytania, wystarczy zmierzyć średnice zbiorników na zdjęciach i obliczyć ich stosunek. Dla tych, którzy wolą znać rzeczywiste średnice zbiorników: 5 m i 3,5 m.

Dociekliwym warto wyjaśnić, że w tym zadaniu i w zadaniach następnych należy pominąć grubość ścian zbiorników.

Odpowiedź:

Pojemność zbiornika A jest około 2,9 razy większa od pojemności zbiornika B.

Pole powierzchni zbiornika A jest około 2 razy większe od pola powierzchni zbiornika B.

4. Zadanie: Ustal, o ile litrów farby więcej potrzeba do pomalowania zewnętrznej ściany zbiornika przedstawionego na fotografii niż do pomalowania jego dachu.

Dane: Przyjmijmy, że 1 litrem farby można pomalować 12 m^2 powierzchni. Średnica zbiornika jest równa 20 m, część cylindryczna ma wysokość 15 m, a część stożkowa ma wysokość 2 m.

Odpowiedź:

Pole powierzchni bocznej zbiornika:

$2\pi \cdot 10 \cdot 15 = 300\pi \approx 942{,}5$ [m^2], *ponadto* $942{,}5 : 12 \approx 78{,}5$*, czyli na pomalowanie ściany zewnętrznej potrzeba około 79 litrów farby.*

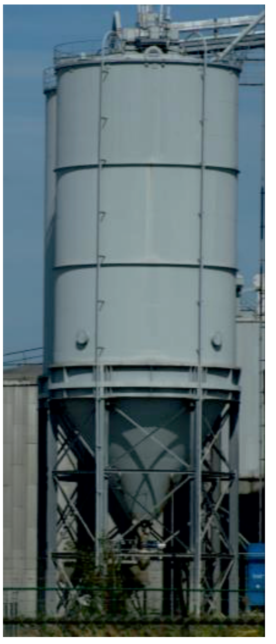
Pole powierzchni dachu zbiornika:

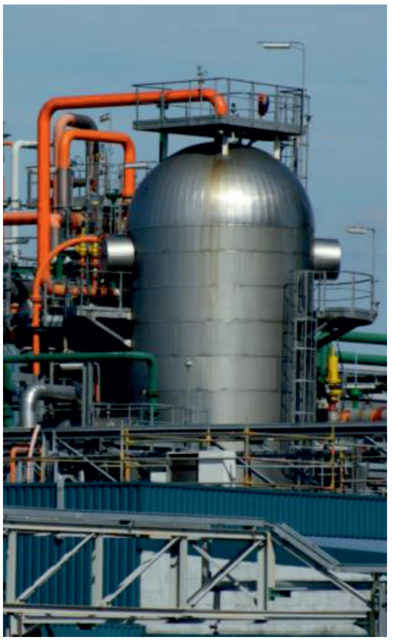
$\pi \cdot 10 \cdot \sqrt{104} \approx 320{,}4$ [m^2], *ponadto* $320{,}4 : 12 \approx 26{,}7$*, czyli na pomalowanie dachu potrzeba około 27 litrów farby.*

Na pomalowanie zewnętrznej ściany zbiornika potrzeba o około 52 litrów farby więcej niż na pomalowanie dachu.

5. Zadanie: Na zdjęciach przedstawiono dwa zbiorniki. Co jest większe, procent objętości pierwszego zbiornika, który stanowi objętość części stożkowej, czy procent objętości drugiego zbiornika, który stanowi objętość części sferycznej?

Dane: Zbiornik pierwszy: średnica zbiornika jest równa 5 m, część cylindryczna ma wysokość 9 m, a część stożkowa ma wysokość 4 m. Zbiornik drugi: Średnica zbiornika wynosi 6 m, a wysokość jego cylindrycznej części wynosi 10 m.





Odpowiedź:

Procent objętości pierwszego zbiornika, który stanowi objętość części stożkowej:

$$\frac{\frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 4}{\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 9 + \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 4} \cdot 100\% \approx 12{,}9\%$$

Procent objętości drugiego zbiornika, który stanowi objętość części sferycznej:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3}{\pi \cdot 3^2 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3} \cdot 100\% \approx 11{,}8\%$$

Procent objętości pierwszego zbiornika, który stanowi objętość części stożkowej, jest większy niż procent objętości drugiego zbiornika, który stanowi objętość części sferycznej.

6. Zadanie: Znajdź gęstość metalu, z którego zrobiona jest cylindryczna sztaba przedstawiona na poniższym zdjęciu. Czy tym metalem może być stal?

Dane: Część danych można odczytać ze zdjęcia: średnica sztaby jest równa 505 mm, a jej masa to 8212 kg. Ponadto istotne jest, że sztaba ma długość 5,2 m. Gęstość stali wynosi około 7,9 g/cm^3.

Odpowiedź:

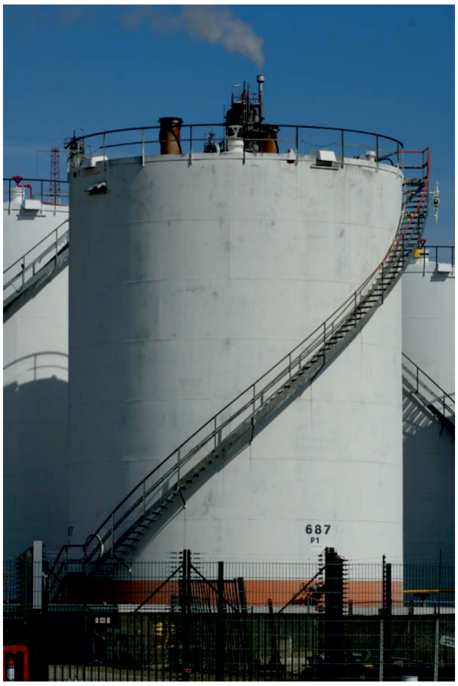
Gęstość metalu: $\frac{8\,212\,000}{\pi \cdot 50{,}5^2 \cdot 520} \approx 7{,}88 \left[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right]$

Możliwe, że sztaba została wykonana ze stali.

7. Zadanie: Na poniższych zdjęciach przedstawiono dwa rodzaje schodów prowadzących na szczyt cylindrycznych zbiorników.

a) Schody na pierwszym zdjęciu biegną wzdłuż najkrótszej drogi po powierzchni walca (czyli wzdłuż tzw. geodezyjnej), łączącej końce przekątnej przekroju osiowego. Oblicz długość tych schodów.

b) Porównaj schody na obu zdjęciach. Które są bardziej strome?



Dane: a) Zbiornik na pierwszym zdjęciu ma kształt walca o średnicy 10 m i wysokości 16 m. Schody są nachylone pod stałym kątem do poziomu (czyli, innymi słowy, łączą punkt krawędzi podstawy dolnej z punktem krawędzi podstawy górnej wzdłuż najkrótszej drogi).

Uwaga. Pozornie długość schodów powinna być równa sumie połowy obwodu podstawy i wysokości zbiornika; aby przekonać się, że jest inaczej, najlepiej rozciąć powierzchnię boczną walca wzdłuż tworzącej i narysować odcinek odpowiadający położeniu schodów.

b) Zbiornik na drugim zdjęciu ma kształt walca o wysokości 14 m, a początek schodów oddalony jest od podstawy walca o 12 m. Warto zauważyć, że stromość schodów można określić za pomocą kąta nachylenia schodów, albo za pomocą „nachylenia”, czyli tangensa tego kąta.

W rozwiązaniu zadania należy pominąć niewielką różnicę w nachyleniu dwóch części schodów na zdjęciu.

Odpowiedź:

a) Długość schodów jest równa długości przekątnej prostokąta o bokach 16 m *i* 5π m*, zatem ich długość jest równa* $\sqrt{16^2 + (5\pi)^2} \approx 22{,}4$ [m].

b) Nachylenie schodów $= \dfrac{\text{różnica wysokości}}{\text{odległość pokonywana w poziomie}} =$ tangens kąta nachylenia schodów do poziomu.

Nachylenie schodów na pierwszym zdjęciu: $\frac{16}{5\pi} \approx 1{,}0186$

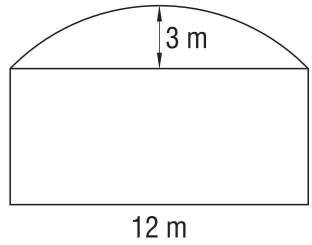
Kąt nachylenia schodów na pierwszym zdjęciu $= \operatorname{arctg}\frac{16}{5\pi} \approx 45{,}5°$.

Nachylenie schodów na drugim zdjęciu: $\frac{14}{12} \approx 1{,}1667$

Kąt nachylenia schodów na drugim zdjęciu $= \operatorname{arctg}\frac{14}{12} \approx 49{,}4°$.

Schody na drugim zdjęciu są bardziej strome.

8. Zadanie: Jakie jest pole powierzchni dachu magazynu przedstawionego na poniższym zdjęciu?



Dane: Dach jest fragmentem powierzchni bocznej walca. Magazyn ma 40 m długości i 12 m szerokości, dach jest o 4 m dłuższy i ma „wysokość" 3 m (patrz szkic powyżej).

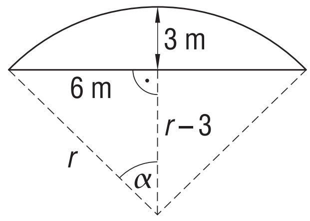
Rozwiązanie:

Skorzystaj z rysunku.

$6^2 + (r - 3)^2 = r^2$, czyli $r = 7{,}5$

$\sin\alpha = \frac{6}{7{,}5} = 0{,}8$, $\alpha \approx 53°$

$P = \frac{106°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 7{,}5 \cdot 44 \approx 612$ [m^2]

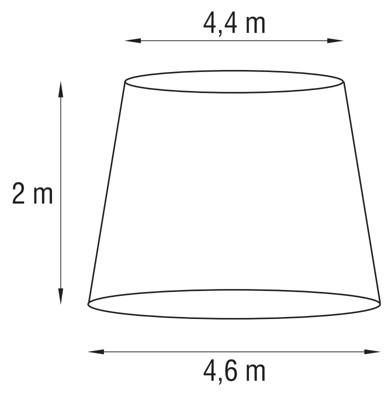


Odpowiedź: Około 612 m^2.

9. Zadanie: Oblicz wysokość komina, którego fragment przedstawiono na zdjęciu obok.

Dane: Średnica komina u wylotu wynosi 2 m. Wymiary pierwszej sekcji komina, powyżej niskiego cylindrycznego pierścienia, przedstawione są na szkicu.

Odpowiedź: Około 26 m.



Podsumowanie

Nauczyciel: Zwróćcie uwagę na trzy ważne wątki dzisiejszych zajęć:

- Znajomość omawianych na lekcjach własności brył i wzorów dotyczących pól powierzchni i objętości tych brył pozwoliły na rozwiązanie wielu problemów dotyczących realnie istniejących obiektów.
- Zadania nie zawierały danych. Podczas rozwiązywania problemów ważną umiejętnością staje się ustalenie, jakie informacje są potrzebne, by na postawione pytania odpowiedzieć.
- Niektóre pytania postawione w zadaniach związane były z bardzo praktycznymi zastosowaniami, inne (np. o liczbie puszek z napojami) wynikały z czystej ciekawości. Znajomość wzorów to tylko drobna część umiejętności matematycznych. Sztuka zadawania pytań jest równie ważna jak umiejętność odpowiadania na nie.