

Karta pracy **M+** do multipodręcznika dla klasy 8 szkoły podstawowej



Niewymierna liczba π



Część A. Sprawdź, czy rozumiesz film.

1. Skreśl w tekście niewłaściwe słowa i sformułowania.

Kręgi i średnice

W czasach późnego **neolitu/paleolitu**, czyli około **4000/5000** lat temu, ludy zamieszkujące **Europe/Azję** budowały z kamieni uporządkowane figury. Kamienny krąg Sunkenkirk w **Cambrii/Umbrii** jest jedną z wieluset tego typu konstrukcji zbudowanych przez pradawnych mieszkańców **Wielkiej Brytanii/Francji**.

Nie wiemy, do czego dawni ludzie używali kamiennych kręgów. Wiemy natomiast, że każdy z nich zawiera ciekawą matematyczną własność. Jeżeli podzielimy **obwód/pole powierzchni** konstrukcji przez **promień/średnicę**, zawsze otrzymamy liczbę bardzo bliską liczbie **2/3**. Im dokładniejszy jest ten pomiar, tym wynik jest bliższy **2,14/3,14**. Iloraz **poła powierzchni/obwodu** każdego koła przez jego **promień/średnicę** jest zatem **zależny od jego wielkości/stały**. Oznaczono go grecką literą π . Liczba π (czytamy **pi/hi**) jest **wymierna/niewymierna**, to znaczy, że jej rozwinięcie dziesiętne ma **skończoną/nieskończoną** sekwencję cyfr po przecinku.

Ponieważ liczba π ma **nieskończone/skończone** rozwinięcie dziesiętne, **nigdy nie/wkrótce** poznamy **wszystkich cyfr/wszystkie cyfry**, które ją tworzą. Żeby obliczyć obwód okręgu o rozmiarze całego widzialnego wszechświata z dokładnością do długości promienia pojedynczego atomu wodoru, wystarczy znajomość liczby π do **39/139** miejsca po przecinku.

2. Wykorzystując tekst zadania 1. oraz wiadomości z filmu, ustal, które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe. Zaznacz odpowiednie pola.

Dawne plemiona budowały setki kamiennych konstrukcji w kształcie dużych kwadratów.

☐ prawda

☐ fałsz

Zmierzono obwód pewnego koła. Obwód podzielono przez długość średnicy tegoż koła. Otrzymano liczbę niewymierną π .

☐ prawda

☐ fałsz

Pierwsze pięć cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby π po przecinku to: 1, 4, 1, 5, 9.

☐ prawda

☐ fałsz

Istnieją okręgi, w których stosunek obwodu do średnicy nie wynosi π .

☐ prawda

☐ fałsz

W okresie neolitu ludzie wytwarzali narzędzia z kamieni.

☐ prawda

☐ fałsz

Litera π jest szóstą literą greckiego alfabetu.

☐ prawda

☐ fałsz

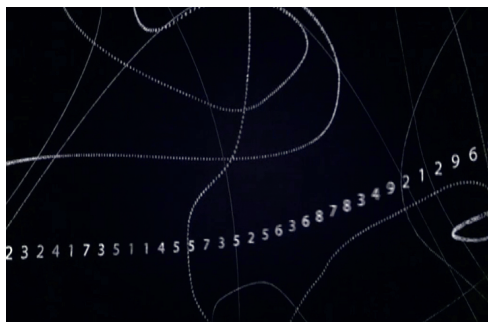
Bez liczby π nie można obliczyć wymiarów wszechświata.

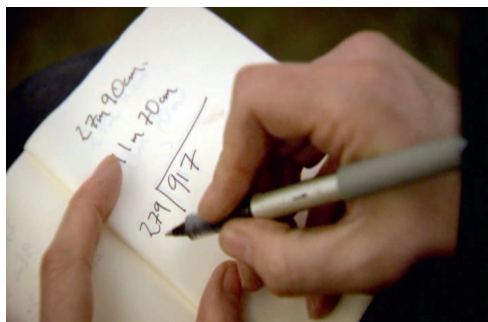
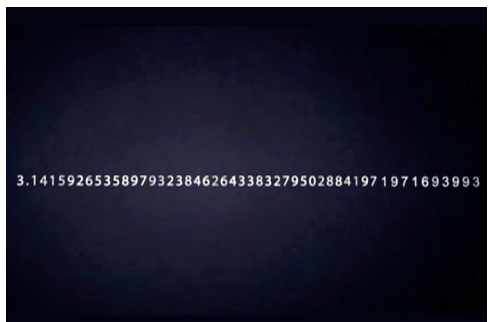
☐ prawda

☐ fałsz

3. Dopasuj pytania do kadrów. Wpisz w okienkach właściwe numery. Odpowiedz na wszystkie pytania.

- Jakiego rodzaju miejsca wybierano na budowę kamiennych kręgów?
- Ile wynosi czterdziesta cyfra po przecinku liczby π ?
- Ciąg których czterech liczb rozwinięcia liczby π należałoby podkreślić, aby zaznaczyć rok urodzenia Ignacego Krasickiego?
- Ile wynosi różnica między wynikiem tego działania a liczbą π ?
- Taśmę mierniczą nawinięto na szpulkę o obwodzie 40,2 cm. Jaka jest średnica szpulki?
- Jaki jest obwód talerza o średnicy 26,4 cm?





Część B. Rozwiąż poniższe zadania.

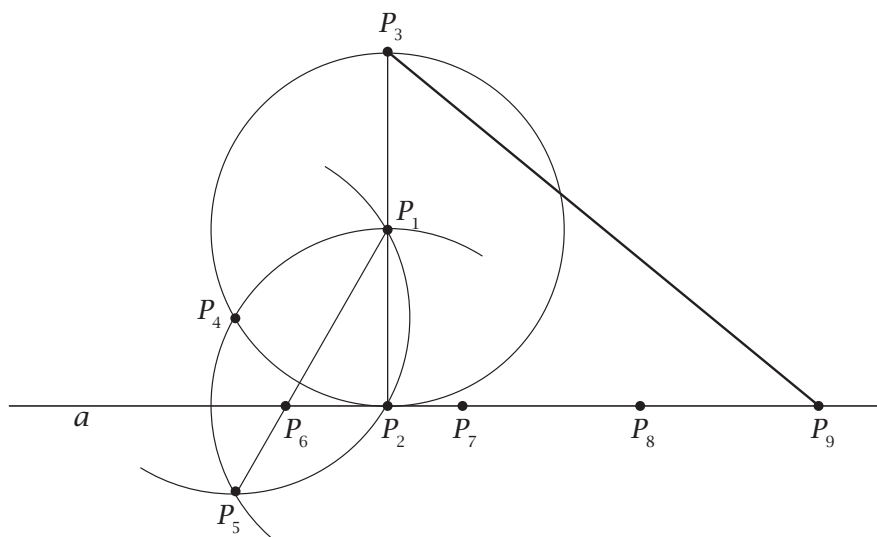


Zadanie 1. Podobno, jeżeli podzielimy obwód kwadratowej podstawy piramidy Cheopsa przez jej wysokość, to otrzymamy liczbę dwukrotnie większą od liczby π . Znajdź np. w internecie wymiary wspomnianej piramidy i sprawdź prawdziwość tej informacji. Dowiedz się, jakie były pierwotne wymiary piramidy Cheopsa.



.....
.....
Odp.

Zadanie 2. I. Wykonaj starannie następującą konstrukcję, używając wyłącznie cyrkla i linijki.



- Narysuj okrąg o środku w punkcie P_1 i średnicy P_2P_3 .
- Narysuj prostą a prostopadłą do odcinka P_2P_3 w punkcie P_2 .
- Narysuj okrąg o tym samym promieniu co pierwszy o środku w P_2 . Przetnie on dany okrąg w punkcie P_4 .
- Narysuj okrąg o środku w punkcie P_4 i tym samym promieniu, co poprzednio. Ten okrąg i nakreślony w podpunkcie c) przetną się w punkcie P_5 .
- Narysuj odcinek P_1P_5 . Odcinek ten ma jeden punkt wspólny z prostą a – punkt P_6 . Z tego punktu na prostej a odłóż trzykrotnie długość promienia okręgu o środku P_1 . Powstaną punkty P_7 , P_8 i P_9 .
- Narysuj odcinek P_3P_9 .

II. Zmierz odcinek P_3P_9 . Podziel jego długość przez długość promienia okręgu narysowanego w podpunkcie a) opisu konstrukcji. Zapisz wniosek.

Wniosek:

Powyższą konstrukcję w roku 1685 opracował polski matematyk Adam Adamandy Kochański.



Zadanie 3. W tabeli podano kilka przybliżonych wartości liczby π , z których korzystali matematycy i budowniczowie na przestrzeni wieków. Porównaj te wartości ze znaną nam dzisiaj wartością liczby π i uporządkuj je w kolejności od najmniej do najbardziej dokładnej. Wpisz w ostatniej kolumnie odpowiednie numery.

Korzystający	Wartość	Kolejność
Babilończycy (około 1900 r. p.n.e.)	$3\frac{1}{8}$	
Egipcjanie (1650 r. p.n.e.)	$\frac{4^4}{3^4}$	
Archimedes (III w. p.n.e)	liczba większa od $3\frac{10}{71}$ i mniejsza od $3\frac{1}{7}$	
Liu Hui (III w.)	3,1415	
Zu Chongzhi (500 r.)	$\frac{22}{7}, \frac{355}{113}$	
Brahmagupta (600 r.)	$\sqrt{10}$	
Kochański Adam Adamandy (1685 r.)	$\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$	
Srinivasa Ramanujan (XX w.)	$\sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}}$	



Zadanie 4. I. Przeczytaj tekst i wykonaj polecenia umieszczone pod nim.

Liczby wymierne nie zawsze mają skończoną liczbę cyfr w rozwinięciu dziesiętnym. Takie liczby jak: 8,2222... czy 7,343434... (trzy kropki sugerują, że zapis liczby nigdy się nie kończy) są liczbami wymiernymi. Mówimy o nich, że mają rozwinięcia dziesiętne okresowe. Liczby te możemy zapisać krócej $8,2222... = 8,(2)$; $7,343434... = 7,(34)$. Muszą zatem istnieć też liczby, w których żaden układ cyfr nigdy nie powtarza się nieskończenie wiele razy. Są to właśnie liczby niewymierne. Nie można ich zapisać. Można co najwyżej zapisać ich przybliżone wartości.

a) Zapisz w krótszy sposób liczby o rozwinięciach dziesiętnych okresowych.

$$102,9678678678... = \dots\dots\dots \quad 43,8002020202... = \dots\dots\dots$$

$$0,1231238989... = \dots\dots\dots \quad 12,121212020202... = \dots\dots\dots$$

b) Zamień ułamki zwykłe na dziesiętne i zapisz je w postaci skróconej (z nawiasami).

$$\frac{11}{7} = \dots\dots\dots \quad \frac{17}{13} = \dots\dots\dots \quad \frac{1}{19} = \dots\dots\dots$$

c) Którym ułamkom zwykłym równe są poniższe ułamki dziesiętne okresowe?

$$0,(1) = \dots\dots\dots \quad 0,(6) = \dots\dots\dots \quad 0,(9) = \dots\dots\dots$$

$$0,(142857) = \dots\dots\dots \quad 0,(09) = \dots\dots\dots \quad 0,(076923) = \dots\dots\dots$$

II. Poszukaj ułamków o liczniku 1 i takim mianowniku, żeby rozwinięcie dziesiętne okresowe miało jak najdłuższy okres (najwięcej cyfr w nawiasie).

.....

.....

.....

.....

.....

Zadanie 5. Matematycy odkryli, że między dowolnymi dwiema liczbami wymiernymi leży jakaś liczba niewymierna. Pobawmy się w łowców takich liczb. Np.: między liczbami 1 i 2 leżą takie liczby niewymierne jak $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. Znajdź co najmniej jedną liczbę niewymierną, leżącą między poniższymi parami liczb wymiernych.

a) $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{6}$ i $\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{311}$ i $\frac{1}{310}$

Zadanie 6. Starożytnego zadania nakreślenia koła i kwadratu o równych polach nie można, jak wiemy, rozwiązać przy użyciu jedynie cyrkla i linijki. Dysponując jednak przybliżonymi wartościami liczby π , można to zadanie rozwiązać w przybliżeniu. Zaplanuj, opisz i wykonaj tę konstrukcję.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Część C. Zagadki.

1. Załóżmy, że $\pi \approx 3,14159265358979$. Korzystając z tej informacji, ułóż następujące słowa w zdanie, dzięki któremu zapamiętasz wartość liczby π w przybliżeniu do czternastego miejsca po przecinku.

wspaniały wszystkim tu pożytek i dla tak i
tobie liczba przynosi cudna poznawana mnie ogółu

.....

.....

.....

.....

2. Matematyk T.E. Lebeck zbudował kwadrat magiczny widoczny z lewej strony. Następnie każdą liczbę w tym kwadracie zastąpił cyfrą rozwinięcia liczby π o numerze wskazanym przez tę liczbę, np.: siedemnastkę zastąpił dwójką, bo dwa jest siedemnastą cyfrą rozwinięcia liczby π . Powstał w ten sposób liczbowy kwadrat (środkowy diagram). Nie jest on kwadratem magicznym, ale gdy dodamy liczby w każdym wierszu i w każdej kolumnie, okaże się, że każda z sum liczb w kolumnie równa jest sumie liczb któregoś z wierszy. Sprawdź, czy własność ta zachodzi dla innych kwadratów magicznych, na przykład dla kwadratu ze słynnej grafiki Albrechta Dürera *Melancholia I*.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

2	4	3	6	9
6	5	2	7	3
1	9	9	4	2
3	8	8	6	4
5	3	3	1	5



Część D. O co warto zapytać, o czym warto porozmawiać?

1. Czy istnieją w Polsce kamienne konstrukcje podobne do tych pokazanych na filmie? Do czego mogły służyć?
2. Dlaczego stała π jest taka ważna? Dlaczego fascynuje tak bardzo, że wiele osób obchodzi jej święto (14 marca)? Jakie jeszcze znamy słynne stałe matematyczne? Czy każda z nich ma swoje święto?
3. W których wzorach matematycznych, lub wzorach z innych dziedzin nauki, występuje liczba π ?
4. W których budynkach i budowlach w okolicy (np. w nowoczesnej wieży lub zabytkowej rotundzie) można doszukać się matematycznych własności?

Część E. Propozycje projektów i prac badawczych.

1. Warto dowiedzieć się więcej na temat Adama Adamandego Kochańskiego, polskiego matematyka z XVII wieku.
2. Można zbudować krąg z niewielkich kamieni. W tym celu trzeba:
 - wybrać dość płaski teren wielkości nie mniejszej niż szkolne boisko,
 - opracować metodę rozkładania kamieni po okręgu,
 - zmierzyć promień i obwód okręgu, wyznaczyć z tych pomiarów liczbę π .

Czy dawni mieszkańcy Europy, budując swe kręgi, korzystali z podobnej metody? Jak inaczej można projektować te konstrukcje?

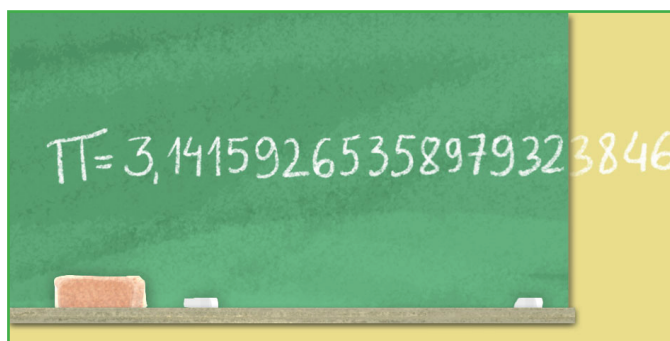
3. Na stronie www.math.edu.pl można znaleźć przybliżenie liczby π z dokładnością do miliona miejsc po przecinku. Można wyszukać w rozwinięciu liczby π liczby coś znaczące, np. daty lub numery PESEL. Cyfra 4 występuje w tym rozwinięciu 100 230 razy, natomiast zero 99 959 razy. Jaka cyfra pojawia się najczęściej, a jaka najrzadziej? Jaki jest najdłuższy ciąg jednakowych cyfr w tym rozwinięciu? Jaki jest najdłuższy ciąg kolejnych cyfr (np. 0123456)?

4. Warto spróbować swoich sił w poetyckiej twórczości związanej z liczbą π i napisać wiersze. Mogą być podobne do słynnego utworu Wisławy Szymborskiej zaczynającego się od słów:

*Podziwu godna liczba π
trzy koma jeden cztery jeden.*

Inne mogą być podobne do wiersza przytoczonego niżej, w którym liczba liter w kolejnych słowach równa jest odpowiedniej cyfrze po przecinku liczby π .

*Źle w mgle i snach bolejącym do wiedzy progu iść,
wszak ognistym wierzącym jedynie miłującym
Bóg do nóg poznania kiść strąca.*



5. Warto zorganizować szkolne święto liczby π . Na podstawie zadań z tej karty pracy, ćwiczeń dostępnych w internecie oraz korzystając z innych źródeł, klasy przygotowują stanowiska, na których każdy może zapoznać się z liczbą π i jej własnościami, rozwiązać zadania. Poza tym ktoś może upiec ciasteczka z odpowiednim napisem, a ktoś inny przygotować ciekawe plakaty oraz kubki i koszulki z nadrukami.

6. W Polsce można odwiedzać miejsca z kamiennymi kręgami. Większość kręgów znajduje się na Pomorzu. Pochodzą z pierwszych stuleci naszej ery. Warto dowiedzieć się więcej na ich temat. Może znajdują się niedaleko szkoły. Wtedy warto się wybrać na wycieczkę, zobaczyć je i zbadać.



Kamienny krąg w Odrach (Pomorze)