ANNA BOGDAŃSKA

Klasa II szkoły ponadgimnazjalnej
zakres rozszerzony – lekcja ćwiczeniowa

Temat:

Własności ciągów – lekcja z kalkulatorem CASIO CLASS PAD 300

Cele:

- rysowanie wykresów ciągów liczbowych w układzie współrzędnych,
- odczytywanie własności ciągów liczbowych na podstawie obserwacji zmian wartości wyrazów ciągu oraz wykresów,
- kształtowanie intuicji związanej z pojęciem ciągu liczbowego,
- badanie, czy ciąg jest arytmetyczny, geometryczny, monotoniczny,
- badanie zbieżności ciągu, poznanie własności ciągów zbieżnych,
- odkrycie własności, że ciąg ograniczony i monotoniczny jest zbieżny.

Do tej lekcji wybieramy na kalkulatorze z menu głównego opcję Sequence (ciąg).

Uczniowie rozwiązują poniższe zadania.

Zadanie 1

Zbadaj, czy ciąg jest arytmetyczny, czy geometryczny.

a) $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+6$ b) $a_n=1/(n+1)$ c) $a_n = 3^n2^{n-1}$ d) $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n-1$

Uwagi do rozwiązania tego zadania

Po naciśnięciu ikonki a_n:... pojawia się okienko, w którym możemy wpisać wzór ciągu (w Recursive ciąg zadany rekurencyjnie, w Explicit – ciąg zadany jawnie). Po wpisaniu wzoru ustalamy zakres zmiennej *n*, naciskając ikonkę ⎙ $^x{}_y$ i wpisując np. 1 i 20. Uczniowie powinni sprawdzić, czy różnica kolejnych wyrazów ciągu lub ich iloraz są stałe. W tym celu można wybrać z ikonki „książka” ikonkę $^a{}_b$b-a, która ukazuje tabelę z kolejnymi wyrazami ciągu oraz obliczonymi kolejnymi różnicami, albo ikonkę $^a{}_b$b/a, która pokazuje tabelę z wartościami wyrazów ciągu oraz kolejne ilorazy. Uczniowie wyciągają odpowiednie wnioski. Następnie sporządzają wykresy ciągów i udowadniają, że ciąg jest arytmetyczny bądź geometryczny, lub uzasadniają, że nie ma on żadnej z tych własności.

Zadanie 2

Zbadaj monotoniczność ciągu:

a) $a_n=|n-5|-n$
b) $a_n=(-1)^n n$
c) $a_1= -0,3$
$a_{n+1}=a_n^2+1$

Uwagi do rozwiązania tego zadania

Uczniowie sporządzają wykresy (warto wziąć większy zakres zmiennej *n* oraz przesuwać wykres) i na ich podstawie stawiają hipotezę dotyczącą jego monotoniczności. Jeśli ciąg jest monotoniczny, to przeprowadzają dowód, w przeciwnym wypadku podają kontrprzykład.

Zadanie 3

Zbadaj zbieżność ciągu:

a) $n^2/(n+1)$

b) $3n/(n+1) – (n+1)/n$

c) $(5n+1)/(n+1)$

Uwagi do rozwiązania tego zadania

Po wpisaniu wzoru i zakresu dla zmiennej *n* (np. od 1 do 50) uczniowie obserwują w tabelce wartości ciągu i stawiają hipotezę. Na wykresie prowadzą odpowiednią prostą poziomą, do której powinny się zbliżać wyrazy ciągu. Taką prostą można narysować, wybierając Analysis ► Sketch ► Horizontal. Z klawiatury wpisujemy odpowiednią liczbę (wartość *y*) i zatwierdzamy. Rysunek powinien potwierdzić hipotezę. Następnie uczniowie powinni obliczyć granicę w zeszycie.

Zadanie 4

Rozpatrzmy teraz ciągi z zadania 3, które są zbieżne (mają granicę będącą liczbą rzeczywistą). Sporządź wykres ciągu będącego:

a) sumą tych ciągów,

b) iloczynem tych ciągów,

c) ilorazem tych ciągów,

d) iloczynem każdego z tych ciągów przez wybraną dowolnie liczbę rzeczywistą.

Zwróć uwagę na granice powstałych ciągów. Postaw hipotezy dotyczące własności ciągów zbieżnych.

Uwagi do rozwiązania tego zadania

Badanie granicy podobnie jak w poprzednim zadaniu. Po wykonaniu zadania nauczyciel wypisuje własności ciągów zbieżnych i wspólnie z uczniami przeprowadza dowód jednej z nich.

Zadanie 5

Zbadaj ograniczoność (narysuj odpowiednie proste), monotoniczność i zbieżność podanych ciągów. Jaki wniosek możesz wyciągnąć?

a) $a_n= 2n+1$

b) $a_n=(-1)^n$

c) $a_n=3+1/n$

d) $a_n=(n+2)/(2n+1)$

e) $a_n=(5n+1)/(n+1)$

Uwagi do rozwiązania tego zadania

Uczniowie, opierając się na tabeli z wyrazami ciągu i odpowiednich wykresach, powinni dojść do wniosku, że ciąg ograniczony i monotoniczny jest zbieżny. Należy zwrócić uwagę, aby uczniowie rysowali proste ograniczające, brali odpowiednio duże *n* i manipulowali wykresem, by dobrze odczytać własności ciągu.

\

Zadanie 6

Podaj wzory (rekurencyjne) trzech ciągów, z których każdy musi spełniać jeden z poniższych warunków:
a) ciąg jest geometryczny,
b) ciąg jest monotoniczny,
c) ciąg jest zbieżny do 5.

Zadanie 7
Podaj wzory (jawne) trzech ciągów, z których każdy musi spełniać jeden z poniższych warunków:
a) ciąg jest ograniczony,
b) ciąg nie jest monotoniczny,
c) ciąg jest zbieżny do 2.

Zadanie 8
Podaj wzory dwóch ciągów, z których każdy musi spełniać jeden z poniższych warunków:
a) ciąg nie ma granicy,
b) ciąg jest ograniczony.

Uwagi do rozwiązania tego zadania
Uczniowie mogą rozwiązywać zadania w grupach, a następnie prezentować swoje wyniki. W poszukiwaniu wzoru powinni weryfikować własności ciągu, sporządzając jego wykres oraz obserwując wartości jego wyrazów. Na koniec powinni udowodnić, że podany przez nich ciąg rzeczywiście spełnia warunki zadania.