

*Marcin Karpiński    Jacek Lech*

# Matematyka z plusem

Program nauczania matematyki dla liceum i technikum  
Zakres podstawowy oraz rozszerzony

Dostosowany do podstawy programowej z 2012 r.



Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, wrzesień 2013 roku

## SPIS TREŚCI

Uwagi wstępne.....	2
Cele kształcenia .....	3
Treści nauczania .....	8
Opis założonych osiągnięć ucznia .....	10
Aspekty wychowawcze szczegółowych wymagań edukacyjnych .....	17
Ramowy rozkład materiału .....	19
Propozycje metod nauczania .....	19
Procedury osiągnięcia celów .....	20
Warunki realizacji programu .....	21

## UWAGI WSTĘPNE

Program *Matematyka z plusem* jest wynikiem doświadczeń nauczycieli szkół średnich różnego profilu (w tym międzynarodowej matury) oraz autorów i redaktorów książek dla wszystkich etapów kształcenia wydawanych przez Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe.

Wiele z elementów nowego stylu nauczania matematyki autorzy programu przetestowali w swojej pracy pedagogicznej.

W konstrukcji programu uwzględniono nie tylko literę, ale przede wszystkim ducha nowej *Podstawy programowej*. Dlatego szczególnie starannie zaimplementowano w programie zapisane w podstawie programowej cele nauczania (wymagania ogólne).

Program przeznaczony jest dla wszystkich szkół ponadgimnazjalnych kończących się maturą. Zawiera on więc zarówno zakres podstawowy, jak i rozszerzony.

Podstawową cechą odróżniającą zakres rozszerzony od zakresu podstawowego stanowią nie tylko dodatkowe treści, ale także większy nacisk na ścisłość języka i znajomość zagadnień teoretycznych.

Program został skonstruowany tak, aby w pierwszej klasie nauczyciel pracujący z uczniami, pochodzącymi z różnych gimnazjów i nauczany według różnych programów, mógł rozpocząć nauczanie od powtórzenia, uzupełnienia i ugruntowania wiadomości z gimnazjum potrzebnych do dalszej nauki. Z kolei w klasie trzeciej stosunkowo mniejsza ilość materiału pozwala zakończyć realizację programu przed egzaminem maturalnym.

Przy podziale materiału pomiędzy klasy zadbano o to, aby nauczyciel zawsze miał odpowiednią ilość czasu na realizację danego zagadnienia.

Program nawiązuje tytułem do najpopularniejszych programów nauczania dla II i III etapu nauczania i został opracowany przez podobny zespół autorów. Może być jednak stosowany niezależnie od tego, jakie programy realizowali uczniowie w gimnazjum.

Do programu przygotowane zostały podręczniki (odrębne dla zakresu podstawowego i zakresu rozszerzonego) oraz dodatkowe materiały: zbiory zadań i sprawdziany.

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, publikując program na stronie [www.gwo.pl](http://www.gwo.pl), wyraża tym samym zgodę na bezpłatne wykorzystanie przez nauczycieli niniejszego programu do pracy z uczniami oraz wyraża także zgodę na tworzenie przez nauczycieli autorskich programów nauczania w oparciu o program nauczania *Matematyka z plusem* pod warunkiem, że w przygotowanym materiale zostanie zapisana informacja, iż powstał on na podstawie programu *Matematyka z plusem* do danego etapu nauczania.

## CELE KSZTAŁCENIA

Cele nauczania matematyki na IV etapie edukacyjnym opisane są w podstawie programowej jako wymagania ogólne. Dla zakresu podstawowego i zakresu rozszerzonego sformułowano pięć następujących celów.

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	
Uczeń interpretuje tekst matematyczny. Po rozwiązaniu zadania interpretuje otrzymany wynik.	Uczeń używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	
Uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.	Uczeń rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.
III. Modelowanie matematyczne.	
Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.	Uczeń buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.
IV. Użycie i tworzenie strategii.	
Uczeń stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.	Uczeń tworzy strategię rozwiązania problemu.
V. Rozumowanie i argumentacja.	
Uczeń prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.	Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

### OGÓLNE CELE EDUKACYJNE

Matematyka jest obok języka polskiego głównym przedmiotem w szkole ponadgimnazjalnej. Jej duże znaczenie polega m.in. na tym, że:

- ◆ jest potrzebna do nauki innych przedmiotów w szkole ponadgimnazjalnej a także na studiach (i to nie tylko na kierunkach typowo ścisłych, ale także psychologii, socjologii, ekonomii itp.),
- ◆ pozwala kształcić zdolność logicznego myślenia potrzebną w wielu zawodach i w życiu codziennym,
- ◆ pozwala lepiej rozumieć i przewidywać zjawiska przyrodnicze, techniczne, ekonomiczne i społeczne,
- ◆ nauczanie tego przedmiotu pozwala osiągnąć także wymienione niżej cele wychowawcze.

Nauczyciel matematyki powinien więc kierować się nie tylko szczegółowymi treściami opisanymi poniżej, ale powinien także realizować następujące cele.

#### Rozwój intelektualny

- ◆ Wksztalcenie nawyku logicznego i poprawnego myślenia oraz stosowania w praktyce zasad logiki.
- ◆ Rozwijanie zdolności stawiania hipotez i ich dowodzenia, odróżniania hipotezy od udowodnionego faktu.
- ◆ Doskonalenie zdolności heurystycznych.
- ◆ Wksztalcenie umiejętności wykonywania działań na liczbach, wyrażeniach algebraicznych i innych podstawowych obiektach abstrakcyjnych.
- ◆ Wksztalcenie umiejętności tworzenia modeli matematycznych i nawyku ilościowego rozważania dostrzeganych zjawisk.

- ◆ Wykształcenie umiejętności planowania rozwiązania problemu matematycznego i realizacji tego planu.
- ◆ Kształtowanie wyobraźni przestrzennej.
- ◆ Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem różnego rodzaju tekstów zawierających informacje ilościowe (w tym diagramów, wykresów, tabel itp.) oraz sporządzania takich tekstów.
- ◆ Rozwijanie umiejętności prawidłowej interpretacji tekstów zawierających dane statystyczne.
- ◆ Przygotowanie do korzystania z nowoczesnych technologii informacji.
- ◆ Kształtowanie umiejętności używania symboli, schematów, rysunków i wykresów.
- ◆ Wykształcenie podstaw matematycznych do zrozumienia zjawisk przyrodniczych, społecznych, technicznych i gospodarczych.

### **Wychowanie**

- ◆ Kształtowanie pozytywnego stosunku do podejmowania aktywności intelektualnej i rozbudzanie ciekawości intelektualnej.
- ◆ Nauczanie dobrej organizacji pracy, systematyczności i pracowitości.
- ◆ Wykształcenie umiejętności prowadzenia merytorycznej dyskusji mającej na celu wspólne dojście do optymalnego rozwiązania.
- ◆ Kształtowanie szacunku dla poglądów innych i umiejętności obrony własnych poglądów.
- ◆ Wykształcenie krytycznego stosunku do własnych poglądów i umiejętności zmiany zdania pod wpływem racjonalnych argumentów.
- ◆ Nauczenie zrozumiałego przedstawiania informacji.
- ◆ Wykształcenie umiejętności argumentowania.
- ◆ Wykształcenie umiejętności planowania pracy.
- ◆ Wykształcenie umiejętności współpracy w grupie.
- ◆ Umożliwienie podejmowania świadomych decyzji dotyczących społeczeństwa, gospodarki i środowiska naturalnego poprzez przekazanie umiejętności będących podstawą rozumienia zjawisk gospodarczych, społecznych i przyrodniczych.
- ◆ Umożliwienie świadomego i krytycznego korzystania z danych statystycznych.
- ◆ Wykształcenie umiejętności samodzielnego zdobywania informacji i samokształcenia.

### **SZCZEGÓŁOWE CELE EDUKACYJNE**

Cele te podano niżej z podziałem na klasy oraz główne kategorie celów edukacyjnych.

#### **KLASA I**

##### **Wykształcenie umiejętności posługiwania się obiektami abstrakcyjnymi**

- ◆ Uporządkowanie i uzupełnienie wiadomości i umiejętności dotyczących działań na liczbach rzeczywistych oraz wyrażeniach algebraicznych.
- ◆ Uporządkowanie i uzupełnienie wiadomości i umiejętności dotyczących geometrii elementarnej.
- ◆ Uzupełnienie wiadomości i umiejętności z zakresu planimetrii o zagadnienia dotyczące związków wielokątów i okręgów.
- ◆ *Zapoznanie z twierdzeniami sinusów i cosinusów.*

### **Wykształcenie umiejętności budowania modeli matematycznych**

- ◆ Powtórzenie i uzupełnienie wiadomości i umiejętności dotyczących zastosowania równań i układów równań liniowych do rozwiązywania różnorodnych problemów.
- ◆ Wykształcenie umiejętności rozwiązywania nierówności pierwszego stopnia oraz ich stosowania.
- ◆ Wykształcenie umiejętności rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych oraz ich stosowania.
- ◆ Wykształcenie umiejętności rozwiązywania niektórych typów równań wyższych stopni.
- ◆ Wykształcenie umiejętności dostrzegania związków i zależności.
- ◆ Wykształcenie umiejętności opisu sytuacji za pomocą funkcji i rozumienia zależności pomiędzy własnościami funkcji a własnościami opisywanej przez nią sytuacji.
- ◆ Wykształcenie umiejętności zastosowania funkcji kwadratowej w rozwiązywaniu prostych zadań optymalizacyjnych.
- ◆ Wykształcenie umiejętności stosowania pojęć i twierdzeń planimetrii do różnorodnych problemów.
- ◆ Wykształcenie umiejętności zastosowania funkcji trygonometrycznych kąta ostrego i kąta rozwartego w sytuacjach praktycznych.

### **Wykształcenie umiejętności projektowania i wykonywania obliczeń**

- ◆ Powtórzenie i uzupełnienie umiejętności z zakresu gimnazjum.
- ◆ Utrwalenie umiejętności działań z użyciem procentów.
- ◆ Doskonalenie umiejętności szacowania wartości liczbowych.
- ◆ Zapoznanie z wykorzystaniem kalkulatora do obliczeń, także obliczeń dotyczących funkcji trygonometrycznych.
- ◆ Zapoznanie z wykorzystaniem kalkulatora graficznego i komputera do rysowania wykresów funkcji (w miarę możliwości technicznych).

### **Zapoznanie z elementami myślenia matematycznego**

- ◆ Wykształcenie umiejętności odróżniania twierdzenia od hipotezy, podawania przykładów i kontrprzykładów.
- ◆ Kształtowanie ścisłości języka matematycznego.
- ◆ Zapoznanie z dowodami twierdzeń matematycznych.
- ◆ Wykształcenie umiejętności argumentowania i samodzielnego uzasadniania prostych twierdzeń matematycznych.

## **KLASA II**

### **Wykształcenie umiejętności posługiwania się obiektami abstrakcyjnymi**

- ◆ *Uzupełnienie wiadomości i umiejętności wykonywania działań dodawania, odejmowania i mnożenia wielomianów.*
- ◆ Uzupełnienie wiadomości i umiejętności z zakresu planimetrii o zagadnienia dotyczące *jednokładności* i cech podobieństwa trójkątów.
- ◆ *Uzupełnienie wiadomości i umiejętności z planimetrii o zagadnienia dotyczące twierdzenia Talesa.*

- ◆ Wykształcenie umiejętności stosowania elementów geometrii analitycznej.
- ◆ Zapoznanie z określeniami funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, *dowolnego kąta oraz z określeniami funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej.*
- ◆ Zapoznanie z podstawowymi pojęciami statystyki opisowej.

### **Wykształcenie umiejętności budowania modeli matematycznych**

- ◆ *Wykształcenie umiejętności rozwiązywania prostych równań wielomianowych oraz prostych nierówności wielomianowych do rozwiązywania różnorodnych problemów.*
- ◆ Wykształcenie umiejętności opisywania różnorodnych zjawisk dyskretnych za pomocą ciągów - wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i arytmetycznego.
- ◆ Wykształcenie umiejętności stosowania metod geometrii analitycznej.
- ◆ Wykształcenie umiejętności wykorzystania pojęcia podobieństwa.
- ◆ *Wykształcenie umiejętności opisywania różnorodnych zjawisk okresowych za pomocą funkcji trygonometrycznych.*
- ◆ Wykształcenie umiejętności opisywania zjawisk wzrostu i zaniku za pomocą funkcji wykładniczej oraz wykorzystania własności tej funkcji oraz pojęcia logarytmu do badania takich zjawisk.
- ◆ Zapoznanie z zastosowaniem logarytmów do opisu sytuacji praktycznych.
- ◆ *Wykształcenie umiejętności opisywania zjawisk za pomocą funkcji logarymicznej oraz wykorzystania własności tej funkcji do badania takich zjawisk.*
- ◆ Wykształcenie umiejętności czytania ze zrozumieniem informacji zawierających dane statystyczne.
- ◆ Wykształcenie umiejętności stosowania pojęć statystyki do opisu różnorodnych sytuacji.

### **Wykształcenie umiejętności projektowania i wykonywania obliczeń**

- ◆ Wykorzystywanie własności liczb i wyrażeń algebraicznych do wykonywania obliczeń najprostszym sposobem.
- ◆ Zapoznanie z zapisem liczb w notacji wykładniczej i działaniami na takich liczbach.
- ◆ Rozszerzenie działania potęgowania na potęgi o wykładniku wymiernym.
- ◆ Zapoznanie z pojęciem logarytmu i kształcenie umiejętności obliczania logarytmów (również przy użyciu kalkulatora).
- ◆ *Wykorzystanie kalkulatora graficznego do szacowania wartości miejsc zerowych wielomianów (w miarę możliwości technicznych).*
- ◆ Wykształcenie umiejętności wykonywania obliczeń z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych, także za pomocą kalkulatora.
- ◆ *Wykształcenie umiejętności obliczania logarytmów o różnych podstawach za pomocą kalkulatora.*
- ◆ Wykształcenie umiejętności obliczania średnich i parametrów rozproszenia, także za pomocą kalkulatora naukowego, kalkulatora graficznego i komputera.
- ◆ Wykształcenie umiejętności samodzielnego prowadzenia prostych badań statystycznych i przedstawiania ich wyników za pomocą poznanych pojęć

### **Zapoznanie z elementami myślenia matematycznego**

- ◆ Dalsze kształcenie umiejętności przewidzianych dla klasy I.
- ◆ Wykształcenie umiejętności podawania przykładów i kontrprzykładów.
- ◆ Wykształcenie umiejętności dowodzenia twierdzeń.

### **KLASA III**

Dodatkowym szczegółowym celem nauczania w klasie trzeciej jest powtórzenie materiału przed egzaminem maturalnym.

### **Wykształcenie umiejętności posługiwania się obiektami abstrakcyjnymi**

- ◆ Zapoznanie z podstawowymi pojęciami rachunku prawdopodobieństwa i wykształcenie umiejętności ich stosowania.
- ◆ Wykształcenie umiejętności posługiwania się pojęciami geometrii przestrzennej.
- ◆ *Wykształcenie umiejętności posługiwania się podstawowymi pojęciami rachunku różniczkowego: granicy funkcji i pochodne .*

### **Wykształcenie umiejętności budowania modeli matematycznych**

- ◆ Wykształcenie umiejętności posługiwania się prostymi równaniami wymiernymi dającymi się sprowadzić do równania kwadratowego.
- ◆ *Wykształcenie umiejętności posługiwania się nierównościami wielomianowymi oraz równaniami i nierównościami wymiernymi.*
- ◆ Wykształcenie umiejętności rozwiązywania prostych problemów kombinatorycznych za pomocą zasady mnożenia *oraz permutacji, wariacji i kombinacji.*
- ◆ Wykształcenie umiejętności rozwiązywania prostych problemów probabilistycznych za pomocą klasycznej definicji prawdopodobieństwa i metod kombinatoryki.
- ◆ Wykształcenie umiejętności stosowania metod stereometrii.
- ◆ *Wykształcenie umiejętności stosowania pochodnych do opisu zmieniających się wielkości.*

### **Wykształcenie umiejętności projektowania i wykonywania obliczeń**

- ◆ Wykształcenie umiejętności wykonywania obliczeń dotyczących prawdopodobieństwa, *także z zastosowaniem kombinatoryki.*
- ◆ Wykształcenie umiejętności szacowania liczb niewymiernych spotykanych w obliczeniach geometrycznych.
- ◆ Wykształcenie umiejętności przekształcania wyrażeń wymiernych.

### **Zapoznanie z elementami myślenia matematycznego**

- ◆ *Kontynuowanie kształcenia umiejętności rozwijanych w klasach I i II.*
- ◆ *Wykształcenie umiejętności rozumowania probabilistycznego.*

# TREŚCI NAUCZANIA

Gwiazdką oznaczono treści nieobowiązkowe. Kursywą oznaczono treści dotyczące zakresu rozszerzonego.

## KLASA I

Treści	Komentarze
<b>LICZBY RZECZYWISTE</b>	
Zbiory liczbowe	Liczby: naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne. Liczby pierwsze i złożone. Przedziały liczbowe.
Działania na liczbach	Działania na liczbach wymiernych i niewymiernych. Wartość bezwzględna liczby.
Obliczenia praktyczne	Działania na procentach.
<b>ALGEBRA</b>	
Powtórzenie	Wyrażenia algebraiczne, równania liniowe, układy równań liniowych; ich zastosowanie; <i>wartość bezwzględna w równaniach i nierównościach</i> ; przekształcanie wzorów.
Nierówności pierwszego stopnia	Rozwiązywanie nierówności pierwszego stopnia, zaznaczanie zbioru rozwiązań na osi liczbowej.
Równania i nierówności kwadratowe	Rozwiązywanie równań i nierówności kwadratowych, zastosowanie ich do rozwiązywania zadań. <i>Zadania z parametrem, wykorzystanie wzorów Viete'a</i> . Rozwiązywanie równań wyższych stopni przez sprowadzenie do przypadku równania liniowego lub kwadratowego.
<b>FUNKCJE</b>	
Własności funkcji	Pojęcie funkcji, przykłady, odczytywanie własności z wykresu. Zastosowanie funkcji do opisu różnorodnych zależności. Przesuwanie i przekształcanie wykresu funkcji.
Funkcja liniowa	Wykres i własności. Wyznaczanie wzoru.
Funkcja kwadratowa	Różne postaci funkcji kwadratowej, rysowanie wykresów, znajdowanie współrzędnych wierzchołka i miejsc zerowych. Wykorzystanie do rozwiązywania prostych zadań optymalizacyjnych.
<b>PLANIMETRIA I TRYGNOMETRIA</b>	
Podstawowe figury geometryczne	Punkty, proste, odcinki, kąty, trójkąty, wielokąty, wielokąty foremne, okręgi, kąty w kole, wielokąty wpisane w okrąg i wielokąty opisane na okręgu, pola i obwody figur. Okręgi i proste. <i>Twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu</i> .
Funkcje trygonometryczne kąta ostrego i kąta rozwartego	Funkcje trygonometryczne kąta ostrego i rozwartego. Zastosowanie do sytuacji praktycznych, wartości funkcji dla szczególnych kątów, wykorzystanie kalkulatora do obliczeń. Tożsamości trygonometryczne. <i>Twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów i ich zastosowania</i> .



## KLASA II

<b>LICZBY</b>	
Potęgi i pierwiastki	Potęga o wykładniku wymiernym, działania na potęgach i pierwiastkach. <i>Potęgi o wykładnikach rzeczywistych.*</i>
<b>WIELOMIANY</b>	
<i>Działania na wielomianach</i>	<i>Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów. Dzielenie wielomianów z resztą.</i>
<i>Twierdzenie Bezouta i jego zastosowania</i>	<i>Twierdzenie Bezouta. Znajdowanie pierwiastków wielomianów.</i>
<i>Nierówności wielomianowe.</i>	<i>Rozwiązywanie nierówności wielomianowych.</i>
<b>CIĄGI</b>	
Pojęcie ciągu	Pojęcie i przykłady ciągów.
Ciąg arytmetyczny i geometryczny	Definicja, wzory, zastosowania. Procent składany.
<i>Granice ciągów</i>	<i>Definicja, własności. Obliczanie granic.</i>
<i>Szeregi geometryczne</i>	<i>Pojęcie szeregu geometrycznego. Obliczanie sumy szeregów geometrycznych.</i>
<b>FUNKCJA WYKŁADNICZA I LOGARYTMY</b>	
Funkcja wykładnicza	Wykresy, własności, zastosowania. <i>Równania i nierówności wykładnicze.*</i>
Logarytmy	Pojęcie i własności logarytmów. Zastosowania. <i>Równania i nierówności logarytmiczne.*</i> <i>Wykresy i własności funkcji logarytmicznych.</i>
<b>PLANIMETRIA I TRYGNOMETRIA</b>	
Planimetria	<i>Twierdzenie Talesa, cechy podobieństwa trójkątów. Jednokładność.</i>
Przekształcenia geometryczne	<i>Przekształcenia geometryczne.* Symetrie.* Przesunięcie. Wektory. Działania na wektorach. Równanie prostej. Równanie okręgu. Długość odcinka. Proste i okręgi.</i>
Funkcje trygonometryczne	<i>Funkcje trygonometryczne kątów ostrych. Zastosowania funkcji trygonometrycznych. Miara łukowa kąta. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta, ich wykresy i własności. Parzystość, nieparzystość, okresowość. Wzory redukcyjne. Proste równania trygonometryczne. Przekształcanie wykresów funkcji trygonometrycznych. Sinus i cosinus sumy i różnicy kątów. Suma i różnica sinusów i cosinusów kątów.</i>
<b>STATYSTYKA OPISOWA</b>	
Przybliżenia	Obliczanie błędów bezwzględnych i względnych.
Czytanie informacji	Tabele, różnego rodzaju diagramy.
Średnie i parametry rozrzutu	Średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, dominanta, odchylenie standardowe. Metody obliczania i interpretacja.
Zbieranie i opracowywanie danych	Samodzielne prowadzenie prostych ankiet i porządkowanie ich wyników.

### KLASA III

<b>POWTÓRZENIE</b>	
Działania na liczbach	Działania na liczbach rzeczywistych (w szczególności własności potęg, pierwiastków i logarytmów). Obliczenia procentowe (w tym procent składany).
Ciągi	Własności i zastosowania ciągu arytmetycznego i geometrycznego.
Funkcje	Pojęcie funkcji, funkcja liniowa, funkcja kwadratowa, wielomiany.
<b>KOMBINATORYKA I PRAWDOPODOBIEŃSTWO</b>	
Prawdopodobieństwo	Pojęcie prawdopodobieństwa i jego obliczania, przykłady; metoda drzewek; własności prawdopodobieństwa. <i>Prawdopodobieństwo warunkowe, twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.</i>
Kombinatoryka	Zasada mnożenia. <i>Permutacje, wariacje, kombinacje.</i> Zastosowania kombinatoryki.
<b>FUNKCJE WYMIERNE</b>	
<i>Wyrażenia wymierne</i>	<i>Pojęcie wyrażenia wymiernego. Działania na wyrażeniach wymiernych, wyznaczanie dziedziny.</i>
<i>Równania wymierne</i>	<i>Proste równania i nierówności wymierne.</i>
<b>STEREOMETRIA</b>	
Wielościany	Graniastosłupy i ostrosłupy, własności miarowe. Wzajemne położenie krawędzi i ścian brył. Przekroje płaskie. Wielościany foremne. Zastosowanie trygonometrii. Objętości i pola powierzchni.
Bryły obrotowe	Stożek, kula i walec. Zastosowanie trygonometrii. Objętości i pola powierzchni.
<b>RACHUNEK RÓŻNICZKOWY</b>	
<i>Granica funkcji</i>	<i>Granica jednostronna i dwustronna. Obliczanie granic. Ciągłość funkcji.</i>
<i>Pochodna funkcji</i>	<i>Definicja pochodnej funkcji. Obliczanie pochodnych. Badanie monotoniczności za pomocą pochodnej. Ekstrema funkcji.</i>

## OPIS ZAŁOŻONYCH OSIĄGNIĘĆ UCZNIĄ

W opisie uwzględniono podział umiejętności pomiędzy klasy oraz klasyfikacje ich na odpowiednie poziomy wymagań (konieczne — ocena dopuszczająca, podstawowe — ocena dostateczna, rozszerzające — ocena dobra, dopełniające — ocena bardzo dobra). Klasyfikacja podwójna, np. K/P, oznacza, że prostsze zadania dotyczące danego zagadnienia należy traktować jako wymagane na poziomie K, a trudniejsze — P.

Od uczniów realizujących program zakresu rozszerzonego wymagamy na poziomie D znajomości przynajmniej niektórych dowodów twierdzeń z zakresu podstawowego.

Za wymagania na poziomie W należy uznać spełnienie wszystkich wymagań z poziomów niższych oraz umiejętność rozwiązywania zadań znacznie wykraczających poza wymagania na poziomie D stopniem trudności lub tematyką.

Kursywą oznaczono wymagania dotyczące zakresu rozszerzonego.

WYMAGANIA	KLASA		
	I	II	III
<b>LICZBY RZECZYWISTE</b>			
Uczeń:			
— podaje przykłady liczb: naturalnych, całkowitych, wymiernych, niewymiernych; pierwszych i złożonych, potrafi zakwalifikować daną liczbę do jednego z tych rodzajów	K		
— zna pojęcie osi liczbowej	K		
— zamienia skończone rozwinięcie dziesiętne na ułamek zwykły i na odwrot	K		
— rozumie pojęcie rozwinięcia okresowego, znajduje rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych	P/R		
— wie, że suma, różnica, iloczyn i iloraz liczb wymiernych są liczbami wymiernymi	P		
— umie pokazać na przykładach, że suma (różnica, iloczyn i iloraz) liczb niewymiernych może być zarówno liczbą wymierną, jak i niewymierną	D		
— wykonuje działania na liczbach wymiernych: cztery działania arytmetyczne, oblicza pierwiastki kwadratowe z liczb naturalnych; także z użyciem kalkulatora	K		
— znajduje wartość bezwzględną liczby	P		
— upraszcza pierwiastki i znajduje ich przybliżone wartości za pomocą kalkulatora		K	
— upraszcza wyrażenia zawierające potęgi o wykładniku wymiernym i pierwiastki		P/R	
— usuwa niewymierności z mianownika (dotyczy niewymierności opisanych za pomocą pierwiastków drugiego stopnia	P/R		
— posługuje się notacją wykładniczą w obliczeniach		R/D	
— oblicza procent danej liczby	K		
— zna pojęcie punktu procentowego	K		
— zwiększa i zmniejsza liczbę o dany procent, porównuje liczby, używając procentów	P		
— rozwiązuje zadania z procentami dotyczące np. płac, cen, podatków, lokat i kredytów, także z użyciem równań i układów równań liniowych	R/D	K/P/R	
— zaokrągla liczby z podaną dokładnością	K		
— szacuje wyniki działań i wielkości ze świata rzeczywistego	P/R		
— wykorzystuje umiejętność szacowania w bardziej złożonych sytuacjach, oblicza błąd bezwzględny i względny przybliżenia		P/R/D	
— oblicza wartość logarytmu:			
• w najprostszych wypadkach (np. $\log 24$ )		K	
• dziesiętnego lub naturalnego za pomocą kalkulatora		P	
• dowolnego za pomocą kalkulatora (ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu)		R	
— zna twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze	R		
— zna dowód twierdzenia o niewymierności pierwiastka kwadratowego z liczby 2	R		
<b>RÓWNAIA I NIERÓWNOŚCI</b>			
Uczeń:			
— oblicza wartość liczbową wyrażenia algebraicznego	K		
— zna wzory skróconego mnożenia	K		
— rozwiązuje równania i nierówności liniowe oraz układy równań liniowych i zadania z treścią prowadzące do takich równań, nierówności i układów	K/P		
— rozwiązuje równania niepełne kwadratowe	K		
— rozwiązuje zadania prowadzące do równań niepełnych kwadratowych	P		
— rozwiązuje równania kwadratowe	P		
— rozwiązuje zadania prowadzące do równań kwadratowych	R		
— rozwiązuje nierówności kwadratowe	P		
— rozwiązuje równania wyższych stopni, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych	P		
— rozwiązuje zadania prowadzące do nierówności kwadratowych	D		
— sprawdza w prostych wypadkach zależność liczby rozwiązań równania kwadratowego z parametrem	K		
— rozwiązuje równania kwadratowe z parametrem	P		
— rozwiązuje nierówności kwadratowe z parametrem	R/D		
— oblicza sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego	K		
— rozwiązuje zadania z parametrem z zastosowaniem wzorów Viète'a	P/R		
— zna dowód wzorów Viète'a	D		
— rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną	R		
— rozpoznaje wielomiany, dodaje je, odejmuje i mnoży przez liczbę		K	
— mnoży wielomian przez dwumian		P	
— mnoży wielomiany		P	
— dzieli wielomian przez dwumian		P	
— dzieli wielomiany		R	
— znajduje pierwiastki wielomianu zapisanego w postaci iloczynu czynników liniowych i kwadratowych		P	

— rozwiązuje proste równania wielomianowe		P	
— stosuje twierdzenie Bezouta do znajdowania pierwiastków wielomianu		R/D	
— rozwiązuje proste nierówności wielomianowe		P/R	
— stosuje twierdzenie o postaci wymiernych pierwiastków wielomianu o współczynnikach całkowitych		P	
— dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne:			
• o jednakowych mianownikach			K
• o różnych mianownikach			P
— wyznacza dziedzinę wyrażenia wymiernego			P
— mnoży i dzieli wyrażenia wymierne			P
— wyznacza dziedzinę funkcji wymiernej			K
— rozwiązuje proste równania wymierne			P/R
— rozwiązuje równania wymierne			P
— rozwiązuje proste nierówności wymierne			R
— korzysta ze wzorów na logarytm iloczynu, ilorazu i potęgi			K
— korzysta ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu			P
— upraszcza wyrażenia algebraiczne zawierające logarytmy			R
<b>FUNKCJE</b>	Uwaga. Funkcje trygonometryczne oraz ciągi zostały ujęte w osobnych działach.		
— odczytuje z wykresu wartości funkcji, argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość, miejsca zerowe i przedziały, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie i ujemne	K		
— odczytuje z wykresu dziedzinę, zbiór wartości, wartość najmniejszą i największą, przedziały monotoniczności	P/R		
— podaje przykłady funkcji	P		
— posługuje się różnymi sposobami opisu funkcji	R/D		
— znając własności zależności między wielkościami, szkicuje wykres funkcji opisującej tę zależność	D		
— rozpoznaje funkcje parzyste, nieparzyste i okresowe na podstawie wykresów			K
— uzupełnia wykres funkcji, wiedząc, że jest ona parzysta, nieparzysta lub okresowa			P
— rozpoznaje funkcje parzyste, nieparzyste, różnowartościowe na podstawie wzoru			R
— rysuje wykres funkcji liniowej	K		
— wyznacza wzór funkcji liniowej, której wykres spełnia dane warunki	P		
— rozwiązuje zadania dotyczące funkcji liniowej i jej zastosowań	R/D		
— z wykresu funkcji $f$ uzyskuje wykres funkcji:			
• $f(x) + a$	K		
• $f(x - a)$	P		
• $f(x - a) + b$	R		
— z wykresu funkcji $f$ uzyskuje wykres funkcji:			
• $af(x)$			K
• $f(ax)$			P/R
• złożone z powyższych typów			R/D
— rysuje wykres funkcji kwadratowej postaci:			
• $y = ax^2 + q$	K		
• $y = a(x - p)^2 + q$	P		
• $y = ax^2 + bx + c$ (szkic bez wyznaczenia współrzędnych wierzchołka)	P		
• $y = ax^2 + bx + c$	R		
— rozwiązuje zadania z treścią prowadzące do poszukiwania ekstremum funkcji kwadratowej	R/D		
— szkicuje wykres dowolnej funkcji wykładniczej			K
— wyjaśnia, w jaki sposób własności funkcji postaci $y = a^x$ zależą od liczby $a$ ; odczytuje własności funkcji wykładniczej z jej wykresu			P/R
— oblicza wartość wielkości opisanej podaną funkcją wykładniczą			K
— wykorzystuje własności funkcji wykładniczej do rozwiązywania zadań opisywanych za pomocą takich funkcji			P/R
— szkicuje wykres dowolnej funkcji logarytmicznej i odczytuje z niego jej własności			K/P
— wyjaśnia, w jaki sposób własności funkcji $y = \log_a x$ zależą od liczby $a$			R
— wykorzystuje logarytmy w badaniu zjawisk opisywanych za pomocą funkcji wykładniczej			P/R
— rozumie rolę logarytmów w skalach logarytmicznych (pH, dB)			D
<b>CIĄGI LICZBOWE</b>			
Uczeń:			
— rozumie intuicyjnie pojęcie ciągu, oblicza dany wyraz ciągu			K
— znajduje regułę, którą można opisać ciąg, którego kolejne wyrazy zostały podane			P/R

i w prostych wypadkach zapisuje ją wzorem, także rekurencyjnym			
— w prostych przypadkach zapisuje wzór ogólny ciągu podanego wzorem rekurencyjnym		D	
— rozumie intuicyjnie pojęcie ciągu arytmetycznego (geometrycznego), podaje i rozpoznaje przykłady		K	
— zna i rozumie formalną definicję ciągu liczbowego		R	
— potrafi utworzyć kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego (geometrycznego), znając pierwszy wyraz i różnicę (iloraz)		P	
— zna wzór ogólny ciągu arytmetycznego (geometrycznego), potrafi znaleźć wzór takiego ciągu, mając dane jego kolejne wyrazy		R	
— znajduje wzór ciągu arytmetycznego (geometrycznego) na podstawie podanych informacji		D	
— korzystając z własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego), bada zjawiska opisane przez taki ciąg		R/D	
— oblicza odsetki lokat:			
• rocznych według podanego oprocentowania		K	
• w procencie składanym		P	
• w różnych okresach kapitalizacji		R	
— porównuje oferty banków i instytucji finansowych		D	
— rozumie intuicyjnie pojęcie granicy ciągu		K	
— znajduje granicę ciągu			
• w prostych przypadkach (np. $1/n$ , $1/n^2$ )		K	
• typu $a^n$ , $n^b$		P	
• korzystając z arytmetycznych własności granic ciągów		P	
— zna i rozumie formalną definicję granicy ciągu		D	
— umie zbadać, czy dany szereg geometryczny jest zbieżny i obliczyć jego granicę		K	
— wykorzystuje sumę szeregu geometrycznego w rozwiązywaniu zadań		P/R	
— bada zależność zbieżności szeregu geometrycznego od parametru		D	
<b>PLANIMETRIA</b>			
Uczeń:			
— zna i rozumie pojęcia, zna własności figur:			
• punkt, prosta, odcinek, półprosta		K	
• równoległość, prostopadłość		K	
• punkty współliniowe, symetralna odcinka		P	
• kąty przyległe, wierzchołkowe, naprzemianległe		R	
• trójkąt równoboczny, równoramienny		K	
• ostrokątny, prostokątny, rozwartokątny		K	
• kwadrat, prostokąt, równoległobok, romb, trapez		K	
• promień, cięciwa, średnica, łuk		K	
• kąt środkowy		K	
• kąt wpisany		P	
• okrąg opisany na wielokącie, okrąg wpisany w wielokąt		P	
• oś symetrii, środek symetrii		K	
• figura symetryczna do danej		K	
— wykonuje konstrukcje:			
• prostej równoległej (prostopadłej) do danej przechodzącej przez dany punkt		R	
• symetralnej odcinka		R	
• związane z trójkątami (łatwe)		R/D	
• okręgu wpisanego w dany trójkąt		P	
• okręgu opisanego na danym trójkącie		P	
• średnicy okręgu, środka okręgu, stycznej do okręgu przechodzącej przez dany punkt		D	
— zna nierówność trójkąta i wykorzystuje ją do rozwiązywania zadań		R/D	
— wie, ile wynosi suma kątów trójkąta i czworokąta i wykorzystuje ten fakt do rozwiązywania zadań		K/P	
— oblicza pola i obwody:			
• trójkąta i równoległoboku, koła		K	
• trapezu, rombu o danych długościach przekątnych		P	
• wycinka koła		R	
— nazywa wzajemne położenie okręgów oraz prostej i okręgu, wykorzystuje te pojęcia w rozwiązywaniu zadań		P/R/D	
— rozwiązuje różne zadania, wykorzystując:			
• twierdzenie Pitagorasa		R/D	
• twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym		R/D	
• pola i obwody figur		R/D	

• okręgi wpisane i opisane na wielokątach	R/D		
• warunek wpisawalności okręgu w czworokąt i opisywalności okręgu na czworokącie	D		
• cechy podobieństwa trójkątów		D	
• jednokładność		R/D	
— wykorzystuje twierdzenie Talesa do rozwiązywania zadań:			
• prostych, korzystających z jednej proporcji		K	
• bardziej skomplikowanych		P/R/D	
— rozumie intuicyjnie pojęcie podobieństwa		K	
— oblicza wymiary figury podobnej do danej w danej skali		K	
— bada, czy dane prostokąty są podobne		P	
— znajduje skalę podobieństwa dwóch figur podobnych		P	
— zna cechy podobieństwa trójkątów i sprawdza, czy dane trójkąty są podobne		R	
— rozumie pojęcie twierdzenia, odróżnia twierdzenie proste od odwrotnego	P/R	R/D	
— potrafi uzasadniać proste fakty geometryczne, np. twierdzenie o sumie kątów trójkąta	K		
— dowodzi prostych twierdzeń geometrycznych	P/R		
— prowadzi bardziej skomplikowane dowody, wykorzystując np. porównywanie kątów, kąty środkowe i wpisane, porównywanie pól, cechy przystawania i cechy podobieństwa; prowadzi proste dowody nie wprost		D	
— przesuwa figurę o dany wektor		K	
— zna i rozumie pojęcia: wektor zerowy, wektory przeciwne, wektory równe		P	
— dodaje wektory i mnoży je przez liczbę, wykorzystuje te umiejętności do rozwiązywania zadań		R/D	
<b>GEOMETRIA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ</b>			
Uczeń:			
— zaznacza w układzie współrzędnych zbiór punktów spełniających warunek typu:			
• $x > 0$ i $y \leq 4$		K	
• $y < 2x + 3$		P	
• $x + y \geq 5$		R	
• układ nierówności liniowych		R	
— rysuje prostą o danym równaniu		P	
— wyznacza równanie prostej spełniającej dane warunki		R/D	
— rozwiązuje graficznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi		K	
— wyjaśnia związek pomiędzy liczbą rozwiązań układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi a wzajemnym położeniem prostych		P	
— rozwiązuje układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem		P/R	
— oblicza odległość między punktami o danych współrzędnych		K	
— rozwiązuje zadania związane z odległością punktów w układzie współrzędnych		R/D	
— rysuje okrąg o równaniu danym w postaci:			
• $x^2 + y^2 = r^2$		K	
• $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$		P	
• $x^2 + y^2 + 2ax + 2bx + c = 0$		W	
— sprawdza analitycznie np. czy dany punkt leży na danym okręgu		P	
— rozwiązuje proste zadania dotyczące równania okręgu jak np. znajdowanie punktów wspólnych prostej i okręgu		R	
— rozwiązuje trudniejsze zadania dotyczące równania okręgu, także z parametrem		D	
— znajduje współrzędne narysowanego wektora		K	
— rysuje przykład wektora o danych współrzędnych		K	
— przesuwa figurę o dany wektor		P	
— znajduje współrzędne wektora o danym początku i końcu		P	
— określa współrzędne wektora przeciwnego do danego		P	
— oblicza długość wektora o danych współrzędnych		P	
— oblicza współrzędne sumy wektorów i iloczynu wektora przez liczbę		R	
— wykorzystuje działania na wektorach do rozwiązywania zadań		R/D	
<b>TRYGONOMETRIA</b>			
<b>FUNKCJE KĄTA OSTREGO LUB ROZWARTEGO</b>			
Uczeń:			
— znając długości boków trójkąta prostokątnego, potrafi obliczyć funkcje trygonometryczne jego kątów	K		
— wykonuje proste rachunki z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych, także z zastosowaniem kalkulatora	P/R		
— stosuje funkcje trygonometryczne kąta ostrego lub rozwartego do:			

• prostych zadań geometrycznych	K		
• prostych sytuacji życia codziennego	P		
• trudniejszych zadań	R		
— rozpoznaje sytuacje, w których może zastosować funkcje trygonometryczne	D		
— korzysta z wartości funkcji kątów $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$ do rozwiązywania prostych zadań	K		
— zna wartości funkcji tych kątów i wykorzystuje je do rozwiązywania zadań	P/R/D		
— zna „jedynkę trygonometryczną” i korzysta z niej do wyznaczenia wartości jednej z funkcji, gdy dana jest inna	P		
— rozumie związek pomiędzy współczynnikiem kierunkowym funkcji liniowej a kątem nachylenia jej wykresu	P		
<b>FUNKCJE DOWOLNEGO KĄTA</b>			
— oblicza wartości funkcji trygonometrycznych:			
• za pomocą kalkulatora		K	
• dla wielokrotności kąta prostego		P	
• sprowadzając kąt do pierwszej ćwiartki		R	
— szkicuje wykres funkcji:			
• sinus, cosinus		K	
• tangens		P	
— odczytuje własności funkcji trygonometrycznych z ich wykresów		R	
— podaje przykłady zjawisk, w których opisie występuje sinusoida		R	
— odczytuje z wykresu informacje na temat takich zjawisk		P	
— zamienia na miarę łukową i z miary łukowej na stopnie:			
• wielokrotności kąta prostego			
• $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$			
• dowolne kąty			
- stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów do wyznaczania dokładnych wartości funkcji trygonometrycznych nietypowych kątów, np. $75^\circ$		P	
- rozwiązuje proste równania i nierówności trygonometryczne, stosując wzory na sinus i cosinus podwojonego kąta		R	
— stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów w rozwiązywaniu równań, nierówności i dowodzeniu tożsamości trygonometrycznych		D/W	
— rozwiązuje równania:			
• postaci $\sin 2x = \frac{1}{2}$ , $\sin 2x + \cos x = 1$ $\sin x + \cos x = 1$ ,		K	
• dające się sprowadzić (np. za pomocą wzorów redukcyjnych) do postaci $\sin x = k$ lub $\cos x = k$ lub $\operatorname{tg} x = k$		P	
• inne proste równania trygonometryczne		R	
— posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. gdy rozwiązuje nie równości typu $\sin x > a$ , $\cos x \leq a$ , $\operatorname{tg} x > a$ )		K	
— rozwiązuje proste nierówności trygonometryczne typu $\cos 2x < 1/2$		R	
— za pomocą twierdzenia sinusów oblicza długość boku lub miarę kąta w trójkącie	K		
— za pomocą twierdzenia cosinusów oblicza długość boku trójkąta	K		
— wykorzystuje twierdzenia sinusów i cosinusów do rozwiązywania zadań	P/R/D		
— umie udowodnić przynajmniej jedno spośród twierzeń: sinusów i cosinusów	D		
<b>STEREOMETRIA</b>			
Uczeń:			
— rozumie pojęcie równoległości i prostokątności w przestrzeni			P
— zna twierdzenie o trzech prostych prostokątnych			R
— rozpoznaje następujące rodzaje brył:			
• sześcian, prostopadłościan, graniastosłup, ostrosłup			K
— potrafi określić liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian brył			K
— oblicza pola powierzchni i objętości:			
• prostopadłościanów i ostrosłupów o podstawie kwadratu			K
• graniastosłupów i ostrosłupów w prostych zadaniach geometrycznych			P
• walca i stożka w najprostszych sytuacjach geometrycznych			K
• kuli			P
— rysuje siatki graniastosłupów i ostrosłupów, odpowiada na proste pytania dotyczące bryły na podstawie jej siatki			R
— stosuje pojęcia: graniastosłup prosty, graniastosłup prawidłowy, ostrosłup prawidłowy			R
— stosuje pola i objętości brył do rozwiązywania zadań			R/D
— rozwiązuje trudniejsze zadania dotyczące wielościanów i brył obrotowych			D
— wskazuje w graniastosłupie prostym kąty: pomiędzy krawędziami, pomiędzy krawędziami a przekątnymi, pomiędzy przekątnymi			K

— wskazuje w ostrosłupie kąty pomiędzy krawędziami oraz między wysokością a krawędzią			P
— wskazuje kąty: pomiędzy wysokością a ścianą boczną, pomiędzy ścianą boczną a podstawą, pomiędzy wysokością ściany bocznej a wysokością bryły np.			R
— rozwiązuje zadania dotyczące graniastosłupów i ostrosłupów bez wykorzystania funkcji trygonometrycznych			K
— rozwiązuje zadania dotyczące graniastosłupów i ostrosłupów polegające na wykorzystaniu pojedynczej funkcji trygonometrycznej			P
— rozwiązuje zadania dotyczące graniastosłupów i ostrosłupów oraz brył obrotowych polegające na wykorzystaniu funkcji trygonometrycznych			R/D
— rozumie pojęcie przekroju, szkicuje przekroje graniastosłupów równoległe i prostopadłe do podstawy i rozwiązuje proste zadania dotyczące tych przekrojów			K
— szkicuje przekroje ostrosłupów i rozwiązuje zadania dotyczące tych przekrojów, także z wykorzystaniem trygonometrii			P
— szkicuje przekroje brył i rozwiązuje proste zadania dotyczące tych przekrojów, także z wykorzystaniem trygonometrii			R/D
<b>KOMBINATORYKA I PRAWDOPODOBIEŃSTWO</b>			
Uczeń:			
— rozumie intuicyjnie pojęcie prawdopodobieństwa i jego związek z częstością			K
— oblicza wprost z definicji prawdopodobieństwa zdarzeń			
• najprostszych, np. otrzymanie parzystej liczby oczek w rzucie kostką			K
• prostych, przy rzucie dwiema kostkami lub dwiema monetami			P
• sumy zdarzeń i zdarzenia przeciwnego			R
— zna pojęcia: zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe, zdarzenie przeciwne			P
— znajduje liczbę możliwych wyników przy kilkukrotnym rzucie kostką i w innych wypadkach o podobnej skali trudności,			P
— oblicza liczbę możliwości z zasady mnożenia w bardziej skomplikowanych wypadkach i wykorzystuje wyniki do obliczania prawdopodobieństwa			R/D
— oblicza liczbę możliwych ustawień $n$ różnych elementów, stosuje tę umiejętność do obliczania prawdopodobieństwa; zna symbol $n!$			K
— rozwiązuje zadania z obliczeniami liczby permutacji z zastosowaniem ich do obliczania prawdopodobieństwa			P/R
— oblicza liczbę wariacji z powtórzeniami i bez, stosuje tę umiejętność do obliczania prawdopodobieństwa			P
— rozwiązuje proste zadania z obliczaniem liczby wariacji (z powtórzeniami i bez) i zastosowaniem ich do obliczania prawdopodobieństwa			P/R
— oblicza w prostych wypadkach liczbę kombinacji i stosuje tę umiejętność do obliczania prawdopodobieństwa w prostych przypadkach			P
— rozwiązuje zadania z obliczaniem liczby kombinacji i zastosowaniem ich do obliczania prawdopodobieństwa, w szczególności zadania dotyczące gier typu totolotka			R/D
— rozwiązuje zadania wymagające jednoczesnego korzystania z permutacji, wariacji i kombinacji i stosowania ich do obliczania prawdopodobieństwa			D
— rozumie intuicyjnie pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego			K
— rozwiązuje zadania związane z prawdopodobieństwem warunkowym			K/P
— umie sformułować wzór na prawdopodobieństwo całkowite			K
— wykorzystuje ten wzór do rozwiązywania zadań			R/D
— umie sformułować wzór na prawdopodobieństwo całkowite			P
— wykorzystuje ten wzór do rozwiązywania zadań			R/D
<b>STATYSTYKA OPISOWA</b>			
Uczeń:			
— odczytuje informacje z tabel, diagramów słupkowych i kołowych			K/P
— wyciąga z takich informacji wnioski, wykonując odpowiednie obliczenia			R/D
— oblicza:			
• średnią arytmetyczną zestawu liczb			K
• odchylenie standardowe zestawu liczb			K
• modę i medianę zestawu liczb			P
• średnią arytmetyczną zestawu danych zapisanego w postaci tabeli lub histogramu			P
• średnią ważoną zestawu liczb			R
— rozumie sens intuicyjny odchylenia standardowego			K
— wyciąga wnioski z informacji w postaci średnich i odchylenia standardowego			P/R/D
— rozumie różnice pomiędzy rodzajami średnich i ograniczenia w ich stosowaniu			D
— przedstawia dane w postaci tabel i diagramów			K/P
— opracowuje statystycznie nieskomplikowany problem			R
— stawia prosty problem i opracowuje go statystycznie			D



<b>RACHUNEK RÓŻNICZKOWY</b>			
Uczeń:			
— rozumie intuicyjnie pojęcie granicy jedno- i dwustronnej			K
— odczytuje wartości granic z wykresu funkcji			K
— znajduje granice dwustronne w najprostszych przypadkach			P
— posługuje się w obliczeniach arytmetycznymi własnościami granic			P
— oblicza granice jedno- i dwustronne funkcji w punkcie			P/R
— zna definicję Heinego granicy funkcji w punkcie			D
— bada ciągłość funkcji w najprostszych wypadkach			P
— rozumie intuicyjnie sens pochodnej funkcji w punkcie jako szybkość zmiany lub jako nachylenia stycznej			K
— zna definicję pochodnej funkcji w punkcie			P
— na podstawie definicji wyznacza pochodne funkcji liniowej i kwadratowej			D
— oblicza pochodną <ul style="list-style-type: none"> <li>• wielomianu dowolnego stopnia</li> <li>• sumy i różnicy danych funkcji</li> <li>• iloczynu i ilorazu funkcji</li> <li>• dowolnej funkcji wymiernej</li> </ul> i umie zastosować ją w rozwiązywaniu zadań z treścią			K K P/R R
— bada za pomocą pochodnej monotoniczność <ul style="list-style-type: none"> <li>• wielomianu stopnia nie większego niż 3</li> <li>• wielomianu dowolnego stopnia</li> <li>• funkcji wymiernej</li> </ul>			K P R
— znajduje ekstrema <ul style="list-style-type: none"> <li>• wielomianu stopnia nie większego niż 3</li> <li>• wielomianu dowolnego stopnia</li> <li>• funkcji wymiernej</li> </ul>			K P R
— rozwiązuje zadania prowadzące do znajdowania ekstremów: <ul style="list-style-type: none"> <li>• wielomianów</li> <li>• funkcji wymiernych</li> </ul>			K P

## ASPEKTY WYCHOWAWCZE SZCZEGÓŁOWYCH WYMAGAŃ EDUKACYJNYCH

Lekcje matematyki są okazją nie tylko do rozwoju intelektualnego uczniów, ale i do ich wychowania. Ogólne cele wychowawcze zostały wymienione wyżej. Tutaj przedstawiamy szczegółowe cele powiązane z poszczególnymi treściami i umiejętnościami.

Uczeń:	
KLASA I	
Liczby rzeczywiste	— wykazuje się starannością w działaniach na liczbach; rozumie, że nawet drobny błąd może prowadzić do całkowicie nieprawidłowego wyniku — rozumie i docenia praktyczne znaczenie wiadomości — na przykładzie klasyfikacji liczb poznaje znaczenie wprowadzania porządku i systematyczności
Algebra	— wykazuje się starannością w obliczeniach algebraicznych — z zaangażowaniem rozwiązuje różnorodne problemy za pomocą narzędzi algebry, wykazując przy tym dociekliwość poznawczą
Funkcje	— wykazuje się dokładnością w rysowaniu i odczytywaniu wykresów — rozumie, jak ważne jest staranne wykonanie wykresu dla jego poprawnej interpretacji — z zaangażowaniem rozwiązuje różnorakie zagadnienia, wykorzystując wiadomości na temat funkcji — docenia znaczenie matematyki w rozwiązywaniu problemów optymalizacyjnych, przez co uczy się szacunku dla wiedzy
Planimetria i trygonometria	— wykazuje się starannością przy wykonywaniu i przekształcaniu rysunków — pamięta o przynoszeniu na lekcje odpowiednich przyrządów kreślarskich i kalkulatora — dba o ład na stanowisku pracy (zwłaszcza podczas lekcji wymagających używania

	<p>znacznej liczby przyrządów)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>— dzięki rozwiązywaniu zadań uczy się samodzielności intelektualnej i dociekliwości</li> <li>— rozwiązując (w miarę możliwości) proste, ale niestandardowe problemy, uczy się podejmować wysiłek intelektualny i nie rezygnować mimo początkowych trudności</li> </ul>
<b>KLASA II</b>	
<i>Wielomiany</i>	— wykazuje staranność, dokładność i cierpliwość przy złożonych obliczeniach
Ciągi	<ul style="list-style-type: none"> <li>— wykazuje staranność w rozwiązywaniu zadań</li> <li>— poznając zasady lokat i kredytów bankowych, kształci oszczędność i umiejętność gospodarowania pieniędzmi</li> </ul>
Funkcja wykładnicza i logarytmy	<ul style="list-style-type: none"> <li>— wykazuje staranność przy sporządzaniu wykresów</li> <li>— rozumie zagrożenia związane ze zjawiskami o wzroście wykładniczym (np. inflacja, rozwój bakterii, reakcja jądrowa) i docenia wysiłki na rzecz przeciwdziałania im</li> <li>— zawsze nosi na lekcje kalkulator i przybory kreślarskie</li> </ul>
<i>Trygonometria</i>	<i>jak w klasie I</i>
Statystyka opisowa	<ul style="list-style-type: none"> <li>— wykazuje się starannością, sumiennością i rzetelnością przy opracowywaniu danych statystycznych</li> <li>— rzetelnie przygotowuje i prowadzi proste badania ankietowe</li> <li>— jest uprzejmy podczas ankietowania respondentów</li> <li>— zachowuje tajemnicę przy anonimowych ankietach</li> <li>— rozumie zagrożenia związane z nierzetelnym prezentowaniem danych statystycznych i stara się przeciwdziałać tym zagrożeniom</li> </ul>
<b>KLASA III</b>	
Powtórzenie	— wykazuje się starannością i sumiennością podczas powtarzania wiadomości z lat ubiegłych
Kombinatoryka i prawdopodobieństwo	<ul style="list-style-type: none"> <li>— wykazuje się starannością podczas obliczeń</li> <li>— docenia umiejętność wykorzystania rachunku prawdopodobieństwa w różnych sytuacjach</li> <li>— z zaangażowaniem rozwiązuje zadania</li> </ul>
Funkcje wymierne	<ul style="list-style-type: none"> <li>— starannie rysuje wykresy</li> <li>— wykazuje się dokładnością w obliczeniach</li> </ul>
Stereometria	<ul style="list-style-type: none"> <li>— wykazuje się szczególną starannością w wykonywaniu rysunków brył trójwymiarowych</li> <li>— zawsze nosi na lekcję przybory kreślarskie</li> <li>— docenia praktyczne zastosowania zdobytej wiedzy</li> </ul>
Rachunek różniczkowy	<ul style="list-style-type: none"> <li>— starannie rysuje wykresy, wykorzystując zależności między własnościami funkcji a własnościami jej pochodnej</li> <li>— wykazuje się dokładnością w obliczeniach</li> <li>— z zaangażowaniem rozwiązuje zadania optymalizacyjne</li> </ul>

## RAMOWY ROZKŁAD MATERIAŁU

Poniższy ramowy rozkład materiału ma charakter orientacyjny. Został opracowany dla wariantu, w którym zakres rozszerzony ma dodatkowo 1 godzinę w kl. I i po 2 godziny w kl. II i III. Dokładniejsze rozkłady materiału z uwzględnieniem różnego przydziału godzin dla zakresu rozszerzonego stanowią element obudowy programu.

Dział	Przybliżona liczba godzin	
	Zakres podstawowy	Zakres rozszerzony (dodatkowo)
<b>KLASA I</b>		
Liczby rzeczywiste	15	5
Algebra	35	5
Funkcje	25	5
Planimetria i trygonometria	30	5
<b>KLASA II</b>		
Potęgi, pierwiastki i logarytmy	25	5
<i>Wielomiany</i>	0	25
Planimetria i geometria analityczna	25	15
<i>Funkcje trygonometryczne</i>	0	35
Ciągi liczbowe	15	5
Statystyka opisowa	10	0
<b>KLASA III</b>		
Powtórzenie	30	10
Kombinatoryka i prawdopodobieństwo	20	15
Funkcje wymierne	10	10
Stereometria	20	10
<i>Rachunek różniczkowy</i>	0	20

## PROPOZYCJE METOD OCENIANIA

Poniżej zaproponowano kilka metod oceniania, które można zastosować w pracy z programem *Matematyka z plusem*. Nie ograniczają one jednak nauczyciela, który może stosować także inne metody, zgodne ze szkolnym systemem oceniania przyjętym w danej szkole.

Przy wyborze sposobu oceniania warto zwrócić uwagę, że jego celem jest nie tylko ustalenie stanu wiedzy uczniów, ale także motywowanie uczniów do pracy oraz wykrywanie braków wiadomości i proponowanie odpowiednich metod uzupełniania wiadomości dla poszczególnych uczniów.

W ocenianiu przydatny będzie powyższy opis założonych osiągnięć.

### **Tradycyjna metoda oceniania**

Nauczyciel ocenia uczniów według tradycyjnej skali 1-6 za sprawdziany, prace domowe, pracę na lekcji itp. Na podstawie tych ocen wystawia ocenę semestralną i roczną.

Jeśli chcemy stworzyć system przejrzysty dla uczniów, możemy ustalić odpowiednie wagi dla poszczególnych rodzajów ocen i obliczać ocenę końcową jako średnią ważoną.

### **System punktowy**

Uczeń otrzymuje za swoje prace nie oceny, lecz punkty. Oceny w skali 1-6 pojawiają się dopiero jako oceny okresowe (zależne od sumy zdobytych punktów). Ogłoszenie systemu punktacji powoduje, że system jest przejrzysty, a uczniowie nie mają zastrzeżeń do ocen.

Oto propozycja punktacji:

- za każdą pracę klasową uczeń może uzyskać od 0 do 50 punktów
- za pracę domową uczeń może uzyskać od 0 do 10 punktów

— za odpowiedź ustną uczeń może uzyskać od 0 do 10 punktów  
— za nieobowiązkowe zadania, aktywność na lekcji itp. uczeń może każdorazowo otrzymać od 0,1 do 0,5 punkta (punkty dodatkowe)

Uzyskaną liczbę punktów porównujemy z maksymalną liczbą punktów, które dany uczeń mógł uzyskać za prace klasowe, prace domowe i odpowiedzi ustne. Wynik wyrażamy w procentach. Zwróćmy uwagę, że wynik może być wyższy niż 100 %, jeżeli uczeń zdobył wiele punktów dodatkowych.

Ocena zależna jest od liczby zdobytych punktów:

- 0 ; 40 % ) — niedostateczny
- 40 % ; 52 % ) — dopuszczający
- 52 % ; 70 % ) — dostateczny
- 70 % ; 85 % ) — dobry
- 85 % ; +∞ ) — bardzo dobry

Ocenę celującą uczeń otrzymuje, gdy spełnia kryteria na ocenę bardzo dobrą, a jednocześnie umie rozwiązywać zadania znacznie wykraczające poza program, zwłaszcza gdy jego wiadomości potwierdzone są np. sukcesem w konkursie lub olimpiadzie.

### Ocena opisowa

W wielu szkołach system oceniania wymaga od nauczyciela wystawiania oceny opisowej zamiast lub oprócz oceny w skali 1 — 6. Nauczycielom, którzy chcą wywiązać się z tego obowiązku, proponujemy korzystanie z poniższych punktów. Można je oczywiście zmodyfikować i dostosować do własnych potrzeb. Punkty uzupełniamy określeniami *słaba*, *średnia*, *dobra* lub bardziej szczegółowym opisem. Ocenę opisową możemy sporządzać dla każdego działu osobno albo dla większych okresów (semestr, rok).

- Znajomość pojęć i twierdzeń:.....
- Znajomość zasad obliczeń: .....
- Sprawność rachunkowa: .....
- Umiejętność stosowania wiedzy do rozwiązywania zadań: .....
- Wyobrażenia geometryczna:.....
- Mocne strony: .....
- Problemy: .....
- Zaległość z wcześniejszych lat nauki:.....
- Zalecenia (nadrabianie zaległości, ćwiczenia itp.):.....

## PROCEDURY OSIĄGANIA CELÓW

### UWAGI OGÓLNE

Wybierając sposoby osiągnięcia celów edukacyjnych, należy uwzględniać możliwości i zainteresowania uczniów, nie zapominając o zasadzie stopniowania trudności.

Skuteczne nauczanie wymaga stosowania zróżnicowanych metod pracy. Poza tradycyjnymi formami, jak praca równym frontem czy praca z podręcznikiem, warto stosować jak najczęściej takie metody, które wymagają aktywnej postawy uczniów. Należy do nich praca w grupie. Podczas zajęć zorganizowanych w ten sposób uczniowie nie tylko zdobywają umiejętności matematyczne, ale także uczą się współdziałania i komunikacji w grupie.

Ważną metodą pracy jest metoda projektu, w której uczniowie wykonują (w grupach lub indywidualnie) prace długoterminowe. Uczy ona samodzielności, odpowiedzialności, organizacji pracy, a także prawidłowego wnioskowania.

Wybrane przez nauczyciela metody pracy muszą uwzględniać także korzystanie z nowoczesnych technik informacji. Kierować się tu trzeba możliwościami technicznymi, warto jednak dążyć do szerszego wykorzystania zwłaszcza komputerów i kalkulatorów graficznych, a także zwykłych kalkulatorów, które obecnie są już powszechnie dostępne.

Obudowa programu ułatwi stosowanie tych procedur.

### PROCEDURY OSIĄGANIA CELÓW SZCZEGÓLOWYCH

Jak najwięcej czasu należy poświęcać na ćwiczenie podstawowych umiejętności. Szczególną uwagę należy zwrócić na umiejętności praktyczne, jak szacowanie, przybliżenia czy obliczenia procentowe.

W kształtowaniu umiejętności posługiwania się obiektami geometrycznymi, zwłaszcza w wypadku stereometrii, należy posługiwać się modelami figur.

Nowe pojęcia i fakty warto przynajmniej w części przypadków wprowadzać jako uogólnienie doświadczeń (wykonania obliczeń, rysunków, pomiarów). Dopiero wówczas można — jeśli pozwalają na to możliwości uczniów — dowodzić twierdzeń. Oczywiście nie umniejsza to znaczenia, jakie ma rozróżnianie hipotezy (opartej na kilku przypadkach) od udowodnionego twierdzenia.

Wszystkie pojęcia matematyczne poznawane na IV etapie edukacyjnym powinny być przedstawione także w zastosowaniach do sytuacji z przyrody, ekonomii, techniki czy życia codziennego. Dotyczy to w szczególności różnego rodzaju funkcji (w tym ciągów), które przedstawiać należy nie tylko jako przykłady przyporządkowań, ale także opis zależności. W wypadku tego celu szczególnie ważna jest wspomniana już wcześniej metoda projektu.

Wprawdzie w IV etapie edukacyjnym znacznie rzadziej niż gimnazjum (a tym bardziej szkole podstawowej) stosować będziemy gry dydaktyczne, ale warto rozważyć stosowanie także tej formy pracy.

Do rozwiązywania zadań dotyczących sytuacji rzeczywistych (przyroda, technika, ekonomia) uczniowie powinni wykorzystywać kalkulatory a w miarę możliwości technicznych — także komputery i kalkulatory graficzne.

*Lekcje z zakresu rozszerzonego będą różnić się od zakresu podstawowego przede wszystkim poziomem ścisłości. Uczniowie powinni umieć zrozumieć prosty dowód twierdzenia zarówno na podstawie tekstu podręcznikowego, jak i wykładu nauczyciela. Dlatego należy stworzyć im możliwość percypowania takich tekstów zarówno w formie pisemnej, jak ustnej*

*Ważne jest również, aby uczniowie zdobyli umiejętność samokształcenia i samodzielnego poszukiwania informacji. Dlatego nauczanie musi przewidywać wytworzenie sytuacji, w których uczniowie będą ćwiczyć te umiejętności. Do tego celu nadaje się np. metoda projektu.*

## WARUNKI REALIZACJI PROGRAMU

### **Podział zakresu podstawowy / zakres rozszerzony**

Program przeznaczony jest zarówno dla uczniów realizujących zakres podstawowy, jak i uczących się również w klasach z zakresem rozszerzonym. Może być wykorzystywany w dwóch sytuacjach:

— uczniowie realizujący tylko zakres podstawowy uczą się w osobnych klasach niż uczniowie realizujący także zakres rozszerzony,

— wszyscy uczniowie wspólnie uczą się materiału z zakresu podstawowego, a niektórzy z nich poznają materiał zakresu rozszerzonego na dodatkowych zajęciach.

Autorzy sądzą jednak, że pierwsza z tych sytuacji lepiej służy kształceniu matematycznemu. Uczniowie poznający materiał zakresu rozszerzonego są bowiem na ogół zdolniejsi i mogliby szybciej omówić zagadnienia zakresu podstawowego. Zaoszczędzony czas mogliby przeznaczyć na trudniejsze zagadnienia. Mogliby także zapoznać się z materiałem zakresu podstawowego w formie bardziej ścisłej (np. z dowodami twierdzeń).

### **Wyposażenie szkoły**

Autorzy uważają, że zapoznanie z nowoczesną technologią informacji jest ważnym celem kształcenia. W wypadku matematyki ważne jest zastosowanie komputerów i kalkulatorów graficznych. Niestety, nie każda szkoła ma odpowiednie do tego możliwości techniczne. Dlatego zagadnienia związane z technologią informacji są w programie uwzględnione, ale ich pominięcie nie przeszkadza w realizacji pozostałych treści. Z tego powodu program może być realizowany niezależnie od wyposażenia szkoły.