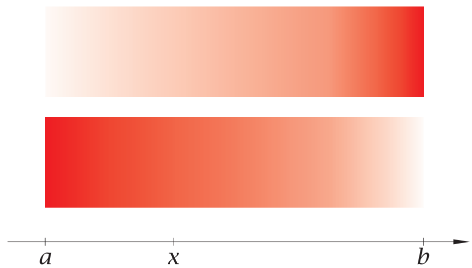
TWIERDZENIE DARBOUX

Na prostokątach przedstawionych obok natężenie koloru czerwonego zmienia się w różny sposób, ale na obu kolor przechodzi stopniowo od białego do intensywnej czerwieni lub odwrotnie. Okazuje się, że przesuwając wzdłuż pasków linijkę ustawioną prostopadle do nich, natrafimy na miejsce, w którym na obu paskach natężenie koloru jest identyczne.



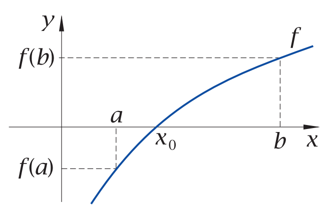
Przyjmijmy, że współrzędna x na osi liczbowej wyznacza położenie linijki. Niech $p_1(x)$ oznacza intensywność koloru czerwonego na górnym pasku odpowiadającą punktowi x. Niech $p_2(x)$ oznacza intensywność koloru na dolnym pasku. Przyjmijmy, że największa intensywność koloru wynosi 1 (czyli $p_1(b) = p_2(a) = 1$), a najmniejsza wynosi 0 (czyli $p_1(a) = p_2(b) = 0$). Możemy przyjąć, że funkcje p_1 i p_2 są ciągłe w przedziale $\langle a; b\rangle$.

Pokażemy, że istnieje taka liczba x_0, że $p_1(x_0) = p_2(x_0)$, gdzie $a < x_0 < b$. Skorzystamy z następującego twierdzenia, zwanego twierdzeniem Darboux (czyt. darbu).

Jeśli funkcja f jest ciągła w pewnym przedziale $\langle a;b\rangle$ i $f(a) \neq f(b)$, to funkcja f przyjmuje w przedziale $(a;b)$ wszystkie wartości między $f(a)$ i $f(b)$. Innymi słowy, dowolna liczba leżąca między $f(a)$ i $f(b)$ jest wartością funkcji dla pewnego argumentu z przedziału $(a;b)$.

Szczególnym przypadkiem tego twierdzenia jest następująca własność:

Jeśli funkcja f jest ciągła w pewnym przedziale $\langle a;b\rangle$ oraz $f(a)$ i $f(b)$ mają różne znaki, to funkcja f w przedziale $(a;b)$ przyjmuje wartość 0, czyli $f(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in (a;b)$.



To, wydawałoby się, niepozorne twierdzenie ma zaskakująco wiele ciekawych i użytecznych zastosowań.

Wróćmy teraz do problemu kolorowych pasków. Z ciągłości funkcji p_1 i p_2 wynika ciągłość funkcji $f(x) = p_1(x) - p_2(x)$. Zauważmy, że $f(a) = -1$ i $f(b) = 1$. Zatem musi istnieć liczba $x_0 \in (a; b)$, taka że $f(x_0) = 0$. Wówczas $p_1(x_0) = p_2(x_0)$.

Uwaga. Warto dodać, że twierdzenie Darboux co prawda pozwala na stwierdzenie, że punkt x_0 istnieje, ale nie pozwala na wskazanie tego punktu.

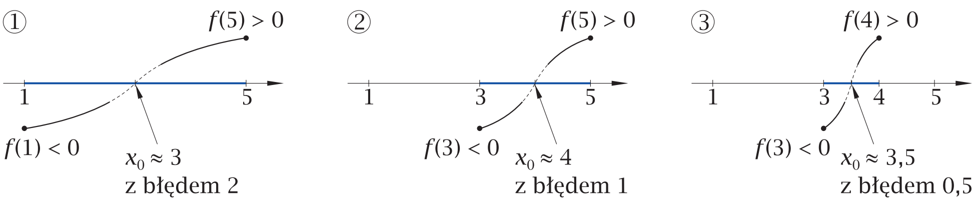
1. Posłaniec wyruszył w drogę rano o godzinie 7^{00} i dotarł do celu w południe. Następnego dnia wyruszył w drogę powrotną też o godzinie 7^{00}. Wracał dokładnie tą samą trasą, ale w innym tempie niż dnia poprzedniego, a mimo to droga zajęła mu ponownie 5 godzin. Udowodnij, że w pewnym punkcie trasy posłaniec znalazł się drugiego dnia dokładnie o tej samej godzinie co dnia poprzedniego.

Wskazówka. Niech $f(x)$ oznacza odległość, jaką pokonał posłaniec pierwszego dnia o godzinie x, i niech $g(x)$ oznacza odległość, jaka pozostała posłańcowi do pokonania o godzinie x drugiego dnia. Rozpatrz funkcję $h(x) = f(x) - g(x)$.

Pokażemy teraz, jak można, korzystając z twierdzenia Darboux, znaleźć przybliżone rozwiązanie równania $x^3 + x - 60 = 0$.

Najpierw znajdujemy dwa argumenty funkcji $f(x) = x^3 + x - 60$, dla których jej wartości mają różne znaki. Łatwo stwierdzić, że $f(1) < 0$ i $f(5) > 0$. Z twierdzenia Darboux wynika, że istnieje liczba $x_0 \in (1; 5)$ taka, że $f(x_0) = 0$. Możemy też powiedzieć, że $x_0 \approx 3$ z błędem 2 (zob. rysunek 1).

Jeśli $f(3) \neq 0$, to możemy wskazać krótszy przedział, w którym jest liczba x_0, i podać jej wartość z mniejszym błędem (zob. rysunek 2). Kontynuując ten proces, możemy podawać przybliżenia x_0 z coraz mniejszymi błędami.



2. Oblicz przybliżoną wartość rozwiązania powyższego równania z błędem 0,25.

Uwaga. Opisana metoda pozwala znaleźć przybliżenie jednego rozwiązania równania. Nie wiemy natomiast, czy równanie to nie ma innych rozwiązań w przedziale $(1; 5)$.

3. Korzystając z wyżej opisanej metody, znajdź przybliżoną wartość rozwiązania równania $x^3 + 2x^2 - 5 = 0$ z błędem 0,5.

Co dalej?

1. Niezależnie od kształtu figury płaskiej można ją podzielić linią prostą na dwie części o równych polach. Wyjaśnij, dlaczego.

2. Uzasadnij, że dowolne równanie wielomianowe nieparzystego stopnia ma co najmniej jedno rozwiązanie.

3. Udowodnij, że w każdej chwili istnieją na równiku takie dwa punkty leżące na krańcach jego średnicy, w których panują takie same temperatury.