gdańskie
wydawnictwo
oświatowe

Tajemny wielokąt

Lekcje z wykopem

Karta pracy dla ucznia

Tajemny wielokąt

Krok 1: Niektóre tablice matematyczne podają wartości funkcji trygonometrycznych kąta 18°.

–	15°	18°	22,5°	36°	54°	67,5°	72°	75°
sin α	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
cos α	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
tg α	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$2+\sqrt{3}$

Zastanów się, w jaki sposób zostały one wyznaczone.

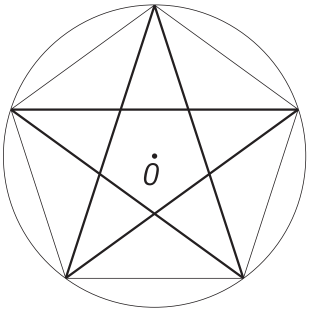
Krok 2: Pentagram (gwiazda pitagorejska) to figura geometryczna nazywana też wielokątem gwiaździstym foremnym. W wielu kulturach pentagram uważany jest za symbol magiczny.

Oto, co mówi Wikipedia (https://pl.wikipedia.org/wiki/Pentagram):

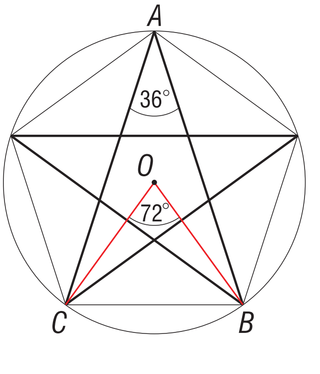
> *Pentagram był symbolem znanym już w czasach neolitu. Pentagram był znany jako Gwiazda Isztar, a później jako Gwiazda Izydy. Mistycy pitagorejscy widzieli w nim symbol doskonałości, kojarzyli go z życiem i zdrowiem. W starożytności przekonanie o właściwościach ochronnych pentagramu było tak silne, że Babilończycy często rysowali go na pojemnikach z żywnością, co miało zapobiegać jej gniciu. Dla pierwszych chrześcijan pentagram odzwierciedlał pięć ran Jezusa, ze względu na 5 wierzchołków. Od XIV wieku uważany za symbol szatana, ze względu na podobieństwo do głowy kozła (odwrócony dwoma wierzchołkami do góry). W XIX wieku Eliphas Lęvi podzielił pentagramy na „dobrą stronę" i „złą stronę". Za „dobrą" uznał ten odwrócony jednym wierzchołkiem do góry, za „złą" odwrócony – zwrócony dwoma wierzchołkami do góry. Pentagram zwrócony jednym wierzchołkiem do góry zwany jest Pentagramem Białym, jest on odzwierciedleniem sacrum – siły boskiej. Może również odzwierciedlać pięć zmysłów człowieka, pięć żywiołów: ziemię, wodę, wiatr, ogień i światło, oraz pięć światów: fizyczny, eteryczny, astralny, mentalny i duchowy, ukazując wyższość umysłu człowieka nad wszelkimi innymi żywiołami i zmysłami. Pentagram zwrócony jednym wierzchołkiem ku dołowi zwany jest Pentagramem Odwróconym, Czarnym lub Pentagramem Baphometa. Pentagram Baphometa przedstawia profanum – człowieczeństwo, odzwierciedla on wyższość żądz i emocji nad rozumem, jest powszechnie uważany za znak satanistyczny, chociaż często mylony z Pentagramem Białym. Biały Pentagram w okręgu (inaczej pentakl) uważany jest za amulet chroniący przed zgubnym wpływem magii oraz klątwami. Można go zauważyć na różnych talizmanach i amuletach oraz odnaleźć w wielu budowlach sakralnych itp. Pentakl jest między innymi symbolem religii Wicca i innych tradycji pogańskich.*

Ćwiczenie 1: Przygotuj prezentację na temat znaczenia pentagramu.

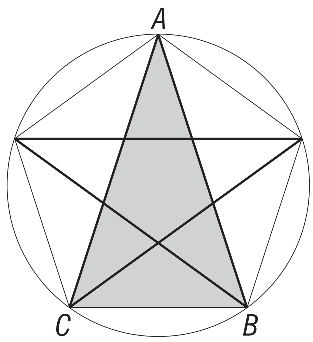
Krok 3: Rysunek przedstawia pięciokąt i pentagram foremny, oba wpisane w koło o środku O.

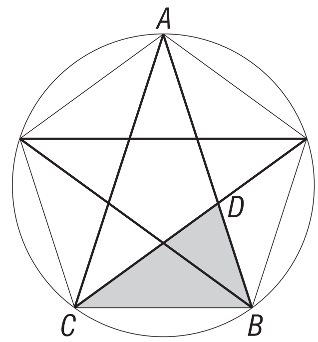


Nietrudno stwierdzić, że kąt CAB ma miarę 36°.



Zauważ, że trójkąty *CBA* i *BDC* są trójkątami podobnymi (na podstawie cechy kkk).





Oto jedna z propozycji ustalenia miar ich kątów:

$|\sphericalangle CAB| = 36°$

$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABC| = \frac{180° - 36°}{2} = 72°$

Miary kątów trójkąta *CBA*: 36°, 72°, 72°

$|\sphericalangle ACB| = 72°$, $|\sphericalangle ACD| = 36°$

$|\sphericalangle DCB| = 72° - 36° = 36°$

$|\sphericalangle CAD| = 36°$, $|\sphericalangle CBD| = 72°$

$|\sphericalangle CDB| = 180° - 36° - 72° = 72°$

Miary kątów trójkąta *BDC*: 36°, 72°, 72°

Z podobieństwa trójkątów *CBA* i *BDC* otrzymujesz: $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|BC|}{|BD|}$. Niech $|CA| = x$, $|CB| = a$, wtedy $|DB| = x - a$. A więc:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a}, \quad a > 0, \quad x > 0$$

$$x^2 - ax - a^2 = 0$$

$$\Delta = a^2 + 4a^2 = 5a^2$$

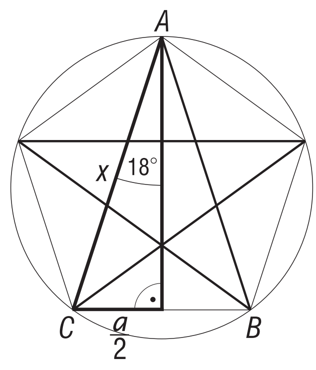
$$\sqrt{\Delta} = a\sqrt{5}$$

$$x = \frac{a - a\sqrt{5}}{2} = \underbrace{\frac{a(1-\sqrt{5})}{2} < 0}_{\text{nie spełnia założeń}} \quad \text{lub} \quad x = \underbrace{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2} > 0}_{\text{spełnia założenia}}$$

Korzystając teraz ze stosunków trygonometrycznych w trójkątach prostokątnych bądź z twierdzenia cosinusów, można wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta 18° (lub jego wielokrotności).

Rozważ na przykład trójkąt *CAA'*:

$$\sin 18° = \frac{\frac{a}{2}}{x} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{1-5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$



Porównaj ten wynik z liczbą podaną w tabeli.

Ćwiczenie 2: Wyznacz cos 18° i tg 18°.

Podsumowanie

Warto zwrócić uwagę na to, jak wiele znajdujemy matematyki wokół nas. Być może nigdy nie podejrzewaliśmy, że gwiazda pięcioramienna kryje tyle tajemnic.